

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В.ЛОМОНОСОВА

ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В.Г.Чирский

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

АНАЛИЗ

(4 СЕМЕСТР)

Материалы для подготовки к экзамену

МОСКВА 2026

Предлагаемая Вашему вниманию брошюра содержит обновлённый курс лекций профессора В.Г. Чирского по математическому анализу, прочитанный в 4 семестре 2026 года общему потоку химического факультета.

Материал, данный в этой разработке, соответствует экзаменационным билетам. В конце разработки содержатся два полезных приложения, содержание которых позволит лучше понять теоретический курс и быстрее вычислять часто встречающиеся интегралы.

Оглавление

Глава 1. Двойные интегралы

§1. Определение двойного интеграла и критерий интегрируемости

1.1. Определение двойного интеграла

1.2 Критерий интегрируемости

§2. Свойства двойных интегралов

§3. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному

§4. Замена переменных в двойном интеграле

§5. Переход к полярным координатам. Вычисление $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Глава 2. Тройные интегралы

Глава 3. Криволинейные интегралы

§1. Криволинейные интегралы первого типа

§2. Криволинейные интегралы второго типа

§3. Формула Грина

§4. Независимость криволинейного интеграла от формы пути интегрирования

§5. Связь с вопросом о полном дифференциале

Глава 4. Поверхностные интегралы

§1. Площадь поверхности, заданной явным уравнением

§2. Площадь поверхности, заданной параметрическими уравнениями

§3. Поверхностные интегралы 1-го типа

§4. Поверхностные интегралы 2-го типа

4.1. Понятие стороны поверхности

4.2. Поверхностные интегралы 2-го типа

§5. Формула Остроградского-Гаусса

§6. Формула Стокса

Глава 5. Приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

Элементы теории поля

§1. Скалярное и векторное поле

§2. Производная скалярного поля по направлению. Градиент скалярного поля

§3. Поток вектора через поверхность. Дивергенция векторного поля.

Векторная формулировка теоремы Остроградского-Гаусса

§4. Соленоидальное поле

§5. Циркуляция, ротор. Векторная формулировка теоремы Стокса

Приложение 1. Введение в теорию дифференциальных форм

Приложение 2. Эйлеровы интегралы

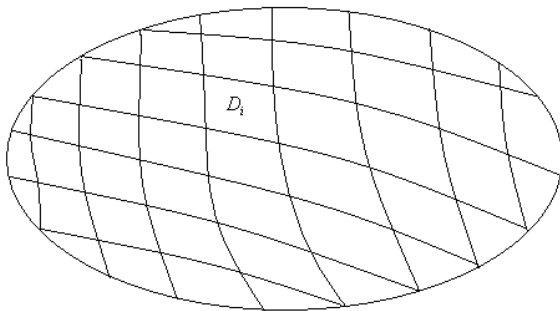
Глава 1. Двойные интегралы

§1. Определение двойного интеграла и критерий интегрируемости

1.1. Определение двойного интеграла

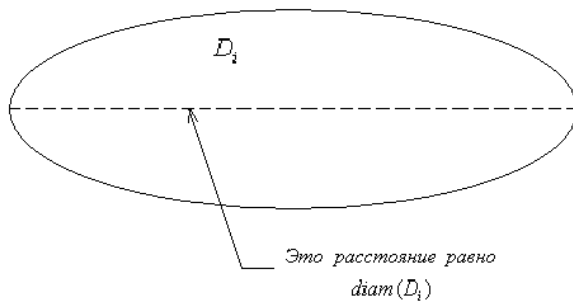
Мы будем рассматривать функции $f(x, y)$, определённые на квадратуемом (то есть имеющем площадь) множестве D . Практически всегда D представляет собой фигуру, ограниченную кусочно-гладкой кривой, или конечное объединение таких фигур. Далее, говоря о квадратуемом множестве, мы ограничиваемся рассмотрением именно таких множеств.

Если вспомнить теорию определённого интеграла, то мы начали её изложение с понятия разбиения T отрезка $[a, b]$. По аналогии, определим разбиение T квадратуемого множества D , как представление множества D в виде объединения конечного числа квадратуемых частей, $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

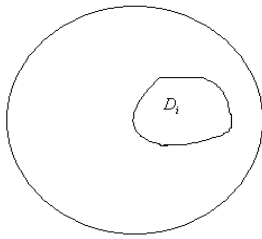


Можно считать, что разбиение D на части D_i также осуществляется с помощью спрямляемых (т.е. имеющих длину) кривых, то есть все D_i также являются фигурами с кусочно-гладкими границами, либо конечными объединениями таких фигур.

В одномерном случае мы рассматривали длины частей разбиения $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В двумерном случае обобщением понятия длины Δx_i будет площадь D_i . Однако нам потребуется также понятие **диаметра множества** $D, (diam(D))$. Эта величина определяется, как точная верхняя грань расстояний между точками множества D . В частности, если D – круг, то $diam(D)$ – это как раз длина диаметра круга в обычном смысле. В общем понятие диаметра множества поясняет рисунок:

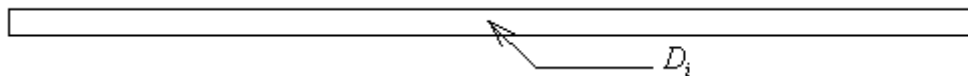


Ясно, что если $diam(D_i)$ невелик, то и площадь D_i также невелика, поскольку неравенство $diam(D_i) < \delta$ означает, что D_i содержится некоторым в круге радиуса δ и имеет площадь не больше, чем $\pi\delta^2$.



Действительно, возьмём произвольную точку множества D_i в качестве центра этого круга. Так как $diam(D_i) < \delta$, остальные точки D_i лежат внутри круга.

Однако площадь множества может быть невелика, а $diam(D_i)$ достаточно велик. Пример – очень тонкий прямоугольник.

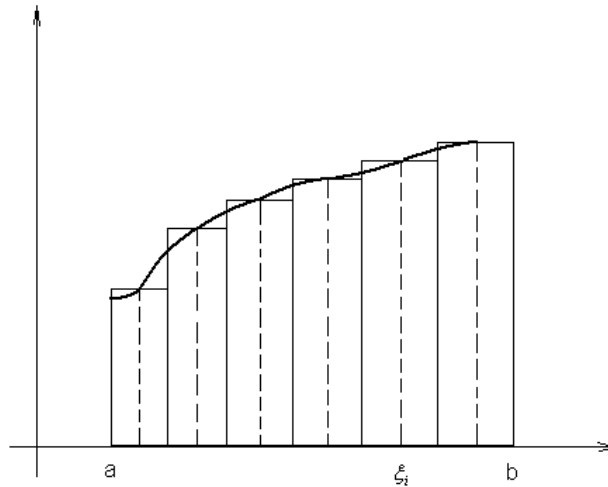


Определим диаметр $d(T)$ разбиения T как наибольший из диаметров $diam(D_i)$ частей этого разбиения. Далее, как и в одномерном случае, выберем точки $N_i \in D_i$ (было:

$\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$). Пусть N_i имеет координаты (ξ_i, η_i) . Важную роль в дальнейшем будет играть понятие **интегральной суммы**, определяемой равенством

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sigma(f, T, \{N_i\})$. Так же, как и в одномерном случае, эта величина

имеет простой геометрический смысл. Вспомним, что сумма $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ представляла собой площадь ступенчатой фигуры вида:



(для простоты считаем, что $f(x) \geq 0$).

Напомним, что объём цилиндра с основанием, имеющим площадь $пл.(S)$ и с высотой h равен $пл.(S)h$. Поэтому интегральная сумма $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) пл.(D_i)$ равна объёму тела, состоящего из цилиндров с высотой $f(\xi_i, \eta_i)$ (для простоты считаем, что $f(x, y) \geq 0$) и основаниями D_i .

Перейдём к основному определению.

Определение. Пусть $f(x, y)$ - ограниченная на квадратируемом множестве D функция. Пусть $I \in \mathbb{R}$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T : d(T) < \delta \quad \forall \{N_i\}, N_i \in D_i, |\sigma(f, T, \{N_i\}) - I| < \varepsilon, \quad (1)$$

то будем говорить, что f - **интегрируемая** на D функция и что число $I \in \mathbb{R}$ является её **интегралом** на этом множестве. Используется обозначение $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Иногда используют обозначение $I = \int_D f(N) d\mu$.

Замечание. Это определение несколько отличается от определения обычного определённого интеграла, в котором отсутствовало требование ограниченности функции $f(x)$. Дело в том, что для обычного определённого интеграла из выполнения условия (1) следовало необходимое условие интегрируемости: *если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $f(x)$ ограничена на $[a, b]$.*

Для двойного интеграла из выполнения условия (1) не следует, что функция $f(x, y)$ ограничена. Это условие, например, заведомо выполняется для любой определённой на множестве D функции, если множество D имеет равную нулю площадь. Для того, чтобы у двойного интеграла сохранились все важные свойства определённого интеграла и добавлено требование ограниченности функции.

Сделаем ещё одно важное замечание. Выше отмечено, что используется обозначение $I = \iint f(x, y) dx dy$ и что иногда используют обозначение $I = \int_D f(N) d\mu$. Следует

отметить, что в определении интегральной суммы изначально участвуют только площади частей разбиения и значения функции в выбранных точках N_i , причём эти величины можно рассматривать и без выбора системы координат. Это означает, что интеграл удобен для описания реальных объектов, существующих независимо от выбора системы координат, что отражено во втором обозначении (которое используется и для других типов интегралов). Разумеется, при вычислении интеграла удобно использовать подходящие координаты, что и отражено в первом обозначении.

1.2. Критерий интегрируемости

Критерий существования определённого интеграла $\int_a^b f(x) dx$ формулировался

в терминах сумм Дарбу, т.е. сумм вида $s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$, $S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$, где

$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$, то есть m_i - нижняя грань, а M_i - верхняя грань значений $f(x)$ при $x \in [x_{i-1}; x_i]$.

Рассуждая аналогично, рассмотрим для ограниченной на квадратируемом множестве D функции $f(N)$ числа $m_i = \inf_{N \in D_i} f(N)$, $M_i = \sup_{N \in D_i} f(N)$ (эти числа

существуют ввиду предполагаемой ограниченности функции $f(N)$ на D и, значит,

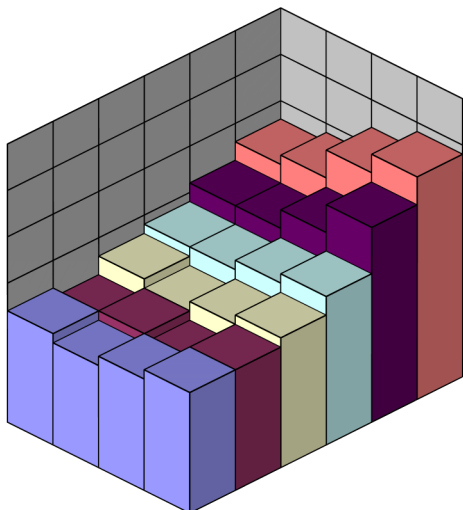
на всех D_i . Определим суммы Дарбу равенствами $s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \text{пл.}(D_i)$,

$S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \text{пл.}(D_i)$. Эти величины представляют собой объёмы тел, состоящих из

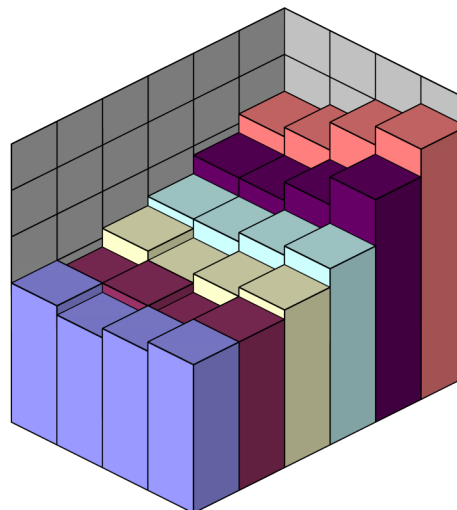
цилиндров с основаниями D_i и высотами, соответственно, m_i и M_i . Ясно, что для

любого разбиения T при любом выборе точек $\{N_i\}$ выполнены неравенства между суммами Дарбу и интегральной суммой, соответствующей этому выбору точек:
 $s(T) \leq \sigma(f, T, \{N_i\}) \leq S(T)$.

На рисунке изображены тела, объёмы которых равны суммам Дарбу.



Нижняя сумма Дарбу



Верхняя сумма Дарбу

Вполне аналогично одномерному случаю можно доказать критерий существования двойного интеграла.

Теорема 1.1. *Ограниченная на квадратируемом множестве D функция $f(x, y)$ интегрируема тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall T d(T) < \delta S(T) - s(T) < \varepsilon$*

(На экзамене ограничиваемся формулировкой).

Из этого критерия следует теорема.

Теорема 1.2. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на квадратируемом множестве D , то $f(x, y)$ интегрируема на этом множестве.*

(На экзамене достаточно формулировки).

§2. Свойства двойных интегралов

Свойство 1. *Если f_1, f_2 — интегрируемые на квадратируемом множестве D функции, а α_1, α_2 — числа, то*

$$\iint_D (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) dx dy = \alpha_1 \iint_D f_1 dx dy + \alpha_2 \iint_D f_2 dx dy.$$

Иными словами, интеграл — линейный функционал.

Свойство 2. *Если f — интегрируема на объединении квадратируемых множеств $D_1 \cup D_2$,*

то

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy - \iint_{D_1 \cap D_2} f dx dy,$$

причем если площадь пересечения $D_1 \cap D_2$ равна 0, то $\iint_{D_1 \cup D_2} f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy$

. (Аддитивность интеграла по множеству).

Свойство 3. Если f - интегрируемая на квадратируемом множестве D функция и $f \geq 0$,

$$\text{то } \iint_D f dx dy \geq 0.$$

Свойство 4. Если f_1, f_2 - интегрируемые на квадратируемом множестве D функции и

$$f_1 \geq f_2, \text{ то } \iint_D f_1 dx dy \geq \iint_D f_2 dx dy.$$

Свойство 5. Если f - интегрируемая на квадратируемом множестве D функция, то функция $|f|$ - также интегрируемая, причем

$$\left| \iint_D f dx dy \right| \leq \iint_D |f| dx dy.$$

Свойство 6. Если f - интегрируемая на квадратируемом множестве D функция, причем $m < f < M$ где m, M ограничивающие множество значений функции f числа, то выполняются неравенства

$$m \cdot \text{пл.}(D) \leq \iint_D f dx dy \leq M \cdot \text{пл.}(D),$$

т.е. существует число γ , удовлетворяющее неравенствам $m \leq \gamma \leq M$, для которого

$$\iint_D f dx dy = \gamma \cdot \text{пл.}(D).$$

Если, кроме того, множество D - связное* и f - непрерывна на нём, то существует точка $(\xi, \eta) \in D$, для которой

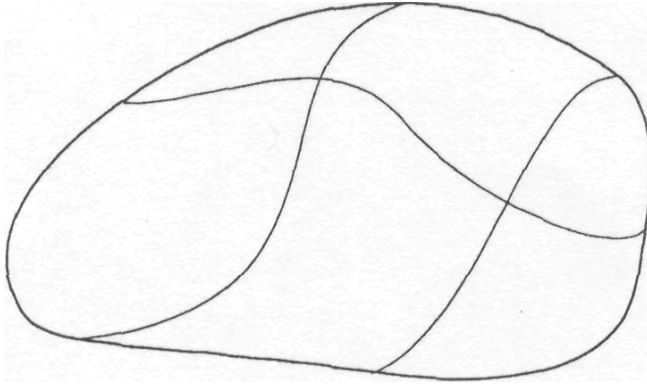
$$\iint_D f dx dy = f(\xi, \eta) \cdot \text{пл.}(D).$$

***Примечание.** Связным множеством на плоскости назовем такое множество, любые две точки которого можно соединить кусочно-гладкой кривой, лежащей в этом множестве.

Доказывать эти свойства мы не будем, поскольку их доказательства вполне аналогичны доказательствам свойств обычного интеграла.

В конце п.1.2. отмечено, что если f - непрерывная на множестве D функция, то f - интегрируема на D . Свойство 2 позволяет утверждать, что если f имеет разрывы на D

лишь вдоль конечного числа спрямляемых линий, разбивающих D на квадратируемые области, то f - интегрируема на D , т.к., по свойству 2, интеграл по D есть просто сумма конечного числа интегралов по полученным частям D (на которых f непрерывна и, значит, интегрируема).



§3. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному интегралу

Двойной интеграл – новый объект и мы укажем способ его вычисления сведением к повторному вычислению определённого интеграла. Это будет прямым обобщением основной теоремы интегрального исчисления (формулы Ньютона-Лейбница). Сначала рассмотрим двойной интеграл по прямоугольной области D , стороны которой параллельны осям координат.

Теорема 1.3. Пусть для функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ по области $D: \{(x, y) | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$. Кроме того, пусть для любого $x \in [a, b]$

существует $J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$.

Тогда существует и интеграл, называемый повторным:

$$\int_a^b J(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

и выполняется равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (2)$$

► Разобьём прямоугольник D на прямоугольники, обозначенные D_{ij} , прямыми, проходящими параллельно оси y через точки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ и прямыми,

параллельными оси x и проходящими через точки $c = y_0 < y_1 < \dots < y_l = d$. Таким образом, $D_{i,j} = \{(x, y), x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]\}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l$.

Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, числа $m_{i,j}$ и $M_{i,j}$, соответственно, равны нижней и верхней граням функции $f(x, y)$ на $D_{i,j}$, откуда $m_{i,j} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{i,j}$ при любом выборе $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Проинтегрируем эти неравенства по y на отрезках $[y_{j-1}, y_j], j = 1, \dots, l$:

$$m_{i,j} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leq M_{i,j} \Delta y_j.$$

Суммируя эти неравенства по j от $j = 1$ до $j = l$, получаем

$$\sum_{j=1}^l m_{i,j} \Delta y_j \leq J(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^l M_{i,j} \Delta y_j$$

Умножим все части этих неравенств на $\Delta x_i > 0$ и суммируем полученные неравенства по i от $i = 1$ до $i = m$:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l m_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^m J(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l M_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Поскольку $\Delta x_i \Delta y_j = \text{пл.}(D_{i,j})$, эти неравенства можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l m_{i,j} \text{пл.}(D_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^m J(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l M_{i,j} \text{пл.}(D_{i,j})$$

или

$$s(T) \leq \sum_{i=1}^m J(\xi_i) \Delta x_i \leq S(T),$$

где T – разбиение D на прямоугольники $D_{i,j}$. При $d(T) \rightarrow 0$ стремится к нулю и величина $\max \Delta x_i$. Кроме того, при $d(T) \rightarrow 0$ также суммы Дарбу

$s(T), S(T) \rightarrow \iint_D f dx dy$. Поэтому интегральные суммы $\sum_{i=1}^m J(\xi_i) \Delta x_i$ имеют предел и

интеграл $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ существует и равен $\iint_D f(x, y) dx dy$, что и утверждалось. ◀

Замечания.

1. В случае, когда $f(x, y)$ непрерывна на D , все условия теоремы выполняются и равенство (2) справедливо. Это следует из свойства интеграла с параметром:

если $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике D , то $J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ — непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция.

Интеграл $J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ представляет собой *собственный интеграл, зависящий от параметра*.

Рассмотрим случай криволинейной трапеции. Справедлива такая теорема:

Теорема 1.4 (Фубини). Пусть область D задана неравенствами $a \leq x \leq b$, $\Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)$, где $\Phi_1(x), \Phi_2(x) \in C[a, b]$. Пусть существует $\iint_D f(x, y) dx dy$ и для любого $a \leq x \leq b$, существует $J(x) = \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y) dy$. Тогда существует интеграл $\int_a^b J(x) dx = \int_a^b dx \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y) dy$ и он равен $\iint_D f(x, y) dx dy$.

► Так как $\Phi_1(x)$ непрерывна на $[a, b]$, существует её минимальное значение c на этом отрезке. Аналогично, существует максимальное значение d функции $\Phi_2(x)$ на отрезке $[a, b]$. Заклучим область D в прямоугольник D^* , состоящий из точек (x, y) , $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. На этом прямоугольнике рассмотрим функцию

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in D^* \setminus D. \end{cases}$$

Условия предыдущей теоремы для функции f^* выполнены. Она интегрируема в D , равна 0 (и, значит, интегрируема) в $D^* \setminus D$. Следовательно, она интегрируема на всём множестве D^* . При этом

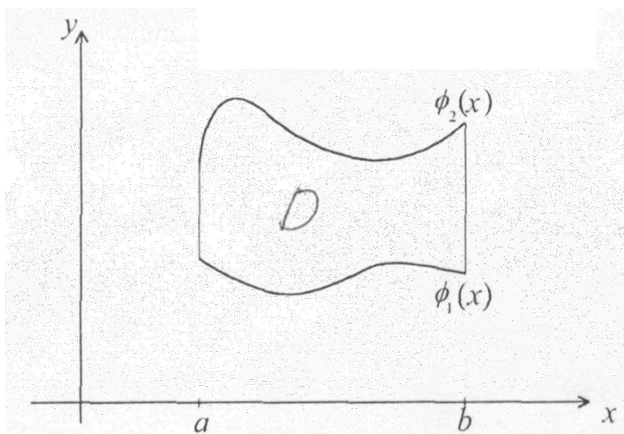
$$\iint_{D^*} f^* dx dy = \iint_D f^* dx dy + \iint_{D^* \setminus D} f^* dx dy = \iint_D f dx dy.$$

Наконец, для любого $x \in [a, b]$ выполнено равенство

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_c^{\Phi_1(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\Phi_2(x)}^d f^*(x, y) dy = \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f^*(x, y) dy.$$

По доказанному в предыдущей теореме,

$$\iint_{D^*} f^* dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y) dy,$$



откуда сразу получаем:

$$\iint_D f dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy,$$

что и требовалось доказать. ◀

Следствие: Пусть $f(x, y)$ непрерывна в области D , ограниченной сверху графиком функции $y = \Phi_2(x)$, снизу - $y = \Phi_1(x)$, где $\Phi_1(x), \Phi_2(x) \in C[a, b]$, а по бокам - отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$. Тогда

$$\iint_D f dx dy = \int_a^b dx \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y) dy.$$

► Из непрерывности $f(x, y)$ сразу следует её интегрируемость на D . Кроме того, для любого $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$ непрерывна (а, значит, интегрируема по y). Все условия теоремы выполнены. ◀

Замечание. Если область D можно ограничить так:
 $c \leq y \leq d$, $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, $\psi_1, \psi_2 \in C[c, d]$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

Смысл этих теорем ясен – указан способ сведения двойного интеграла к собственным интегралам, зависящим от параметра.

§4. Замена переменных в двойном интеграле

При вычислении интегралов часто бывает удобно сделать замену переменных $x = x(u, v), y = y(u, v)$, где $x(u, v), y(u, v), \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$ – непрерывны в некоторой области $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Впоследствии мы будем часто писать просто $\frac{\partial x}{\partial u}$ вместо $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)$ и т.п. и, кроме того, говорить при выполнении вышеупомянутых условий, что x и y – непрерывно дифференцируемые в Δ функции. Будем также использовать обозначения

$$\overline{r}_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right), \overline{r}_v(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right).$$

Пусть при этом формулы $x = x(u, v), y = y(u, v)$ задают взаимно-однозначное отображение квадратуемых областей: $D \leftrightarrow \Delta, (x, y) \in D, (u, v) \in \Delta$. Кроме того, потребуем, чтобы всюду на области Δ не равнялся 0 якобиан отображения

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

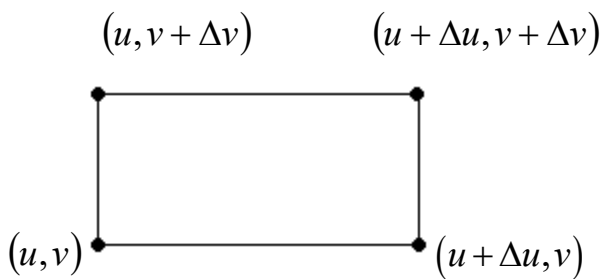
Теорема 1.5. При сформулированных выше условиях для непрерывной на D функции $f(x, y)$ выполняется равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

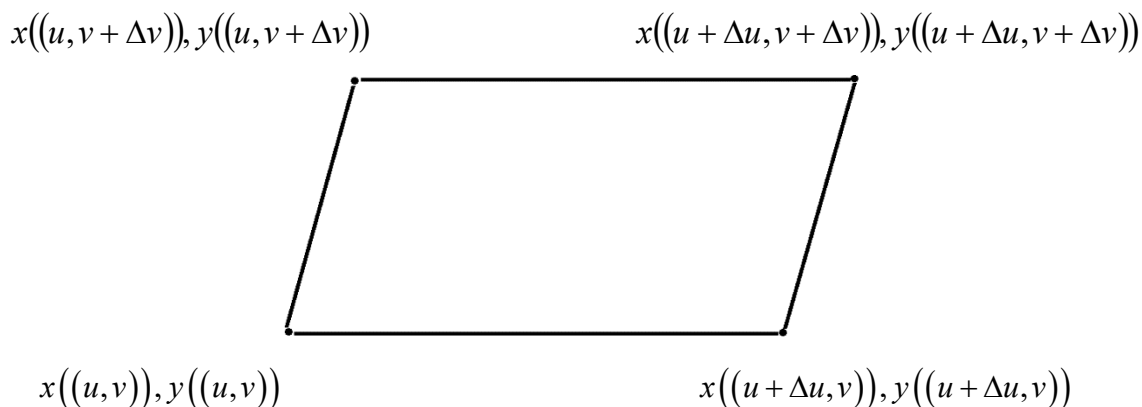
► Строгое доказательство этой теоремы потребовало бы значительных усилий из-за обилия технических деталей. Мы изложим здесь схему доказательства.

Во-первых, оба интеграла в формулировке теоремы существуют, поскольку $f(x, y)$ – непрерывная функция.

Рассмотрим разбиение области Δ прямыми, параллельными осям u и v . Рассмотрим его часть, имеющую вид прямоугольника с вершинами



При отображении $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ вершины перейдут, соответственно, в точки



Далее, при $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$

$$x(u, v + \Delta v) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\Delta v + \bar{o}(\Delta v)$$

$$y(u, v + \Delta v) - y(u, v) = \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\Delta v + \bar{o}(\Delta v)$$

$$x(u + \Delta u, v) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\Delta u + \bar{o}(\Delta u)$$

$$y(u + \Delta u, v) - y(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\Delta u + \bar{o}(\Delta u)$$

$$x(u + \Delta u, v + \Delta v) - x(u, v + \Delta v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v + \Delta v)\Delta u + \bar{o}(\Delta u)$$

$$y(u + \Delta u, v + \Delta v) - y(u, v + \Delta v) = \frac{\partial y}{\partial u}(u, v + \Delta v)\Delta u + \bar{o}(\Delta u)$$

$$x(u + \Delta u, v + \Delta v) - x(u + \Delta u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u + \Delta u, v)\Delta v + \bar{o}(\Delta v)$$

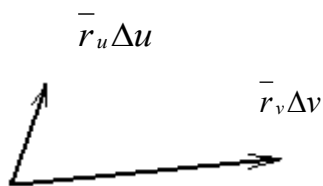
$$y(u + \Delta u, v + \Delta v) - y(u + \Delta u, v) = \frac{\partial y}{\partial v}(u + \Delta u, v)\Delta v + \bar{o}(\Delta v)$$

При малых $\Delta u, \Delta v$ производные $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$, вычисленные в точках

$(u + \Delta u, v), (u, v + \Delta v)$, мало отличаются от соответствующих производных,

вычисленных в точке (u, v) , поэтому и определённые выше векторы $\bar{r}_u(u, v)\Delta u, \bar{r}_v(u, v)\Delta v$ мало отличаются от векторов $\bar{r}_u(u + \Delta u, v)\Delta u, \bar{r}_v(u + \Delta u, v)\Delta v$ и $\bar{r}_u(u, v + \Delta v)\Delta u, \bar{r}_v(u, v + \Delta v)\Delta v$, соответственно, и рассматриваемый четырёхугольник представляет собой «почти параллелограмм».

Как известно из курса линейной алгебры, площадь параллелограмма со сторонами $\bar{r}_u\Delta u, \bar{r}_v\Delta v$



равна модулю определителя, составленного из координат этих векторов,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{vmatrix} = J(u, v)\Delta u\Delta v,$$

т.е. равна $|J(u, v)\Delta u\Delta v|$. Поэтому при сделанном преобразовании координат интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^n f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| \Delta u \Delta v$$

близка по величине к интегральной сумме

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \text{пл.}(D_i).$$

Точнее говоря, можно доказать, что соответствующие интегральные суммы для интегралов, стоящих в правой и левой частях доказываемого равенства, отличаются друг от друга на стремящуюся к нулю величину. Поэтому и интегралы совпадают. ◀

Замечание. Утверждение теоремы сохранится, если условие взаимной однозначности отображения $x = x(u, v), y = y(u, v)$ и отличия якобиана от нуля нарушится на множестве нулевой площади.

§5. Переход к полярным координатам. Вычисление $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Пусть требуется вычислить $\iint_D f(x, y) dx dy$ по области D , которая задаётся в полярных координатах условиями

$$\begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta, \\ r \leq r(\varphi) \end{cases}.$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}.$$

При этой замене нарушается взаимная однозначность отображения. Точке $(0,0)$ соответствует целый отрезок $[\alpha, \beta]$ на оси φ . Однако и точка, и отрезок имеет нулевую площадь, и теорема, с учётом замечания, справедлива. Осталось вычислить якобиан преобразования.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi, \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi.$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Следовательно,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Полярные координаты бывают очень полезны при вычислениях. Рассмотрим пример.

Пример. Найти $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Решение. I — это несобственный интеграл, и прежде всего следует установить его сходимость. По определению,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Первый из интегралов — собственный, второй — сходится по 1-й теореме о сравнении, так как при $x \geq 1$ справедливо неравенство $x^2 \geq x$, из которого следует,

что $-x^2 \leq -x$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, а интеграл $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$, очевидно, сходится. При этом $I \geq 0$.

Обозначим $I_R = \int_0^R e^{-x^2} dx$ (очевидно, $I_R \rightarrow I, R \rightarrow \infty$). Тогда, поскольку обозначение

переменной интегрирования можно выбрать произвольным, т.е.

$$I_R = \int_0^R e^{-x^2} dx = \int_0^R e^{-y^2} dy,$$

имеем

$$I_R^2 = I_R \cdot I_R = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \iint_{S_R} e^{-x^2-y^2} dxdy,$$

где S_R — квадрат. Пусть $C_R, C_{\sqrt{2}R}$ — четверти круга, соответственно, радиусов R и

$\sqrt{2}R$. Так как $e^{-x^2-y^2} \geq 0$, то по свойствам 2, 3 двойного интеграла

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq I_R^2 \leq \iint_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

В интеграле $\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$ перейдем к полярным координатам:

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^R e^{-r^2} \frac{1}{2} dr^2 = \frac{\pi}{4} \left(e^{-r^2} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

Аналогично,

$$\iint_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dxdy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

$$\text{и } \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq I_R^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}).$$

При стремлении R к ∞ получаем, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R^2 = \frac{\pi}{4}, \text{ то есть } I^2 = \frac{\pi}{4}, I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Глава 2. Тройные интегралы

Рассмотрим кубируемое множество $V \subset \mathbb{R}^3$. Считаем, что оно ограничено конечным числом кусочно-гладких поверхностей. Разбиение T на части V_i также осуществляется кусочно-гладкими поверхностями. Диаметр разбиения определяется аналогично двумерному случаю. Также, по аналогии, можно определить для функции $f(M)$, разбиения T множества V на части V_i и для выбранных точек $M_i \in V_i$ интегральную сумму

$$\sigma(f, T, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \text{об.}(V_i),$$

где $\text{об.}(V_i)$ обозначает объем части V_i .

Определение. Пусть $I \in \mathbb{R}$ – такое число, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall T, d(T) < \delta$
 $\forall \{M_i\} \quad \left| \sigma(f, T, \{M_i\}) - I \right| < \varepsilon$.

Тогда мы говорим, что функция f **интегрируема** на множестве V , число I есть **интеграл** функции f по множеству V и обозначаем это так: $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$.

В этом традиционном обозначении отражено то обстоятельство, что хотя в определении тройного интеграла фигурируют только объёмы частей разбиения и значения функции в выбранных точках и все эти величины могут быть вычислены независимо от какой-либо системы координат, при реальном вычислении тройного интеграла введение системы координат очень полезно.

Как и в случае двойного интеграла, выполняются свойства 1-6. Полезное упражнение - переформулировать их для тройного интеграла.

Теорема 2.1. Ограниченная на кубируемом множестве V функция $f(x, y, z)$ интегрируема тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для всех разбиений T с условием $d(T) < \delta$ выполняется неравенство $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

(На экзамене ограничиваемся формулировкой).

Из этого критерия следует теорема.

Теорема 2.2. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на кубируемом множестве V , то $f(x, y, z)$ интегрируема на этом множестве.

(На экзамене достаточно формулировки).

Точно также можно убедиться в том, что если точки разрыва f лежат на конечном числе кусочно-гладких поверхностях, лежащих на V и разбивающих V на кубируемые области, то f интегрируема на V .

Вычисление тройного интеграла производится по следующему правилу (теорема Фубини).

Теорема 2.3. Пусть V задана следующими неравенствами:

$$\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y), (x, y) \in D,$$

где D — квадратируемая область на плоскости, ψ_1, ψ_2 — непрерывные функции. Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Замечание. Если, кроме того, область D задана неравенствами $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, где φ_1, φ_2 — непрерывные функции, то

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Сформулируем общую теорему о замене переменных.

Теорема 2.4. Пусть отображение $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между областями $\Delta, (u, v, w) \in \Delta$ и

$V, (x, y, z) \in V$, причем функции x, y, z — непрерывно дифференцируемые в Δ .

Пусть всюду в области Δ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

Пусть $f(x, y, z)$ — непрерывная функция. Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J| du dv dw.$$

Как и для двойного интеграла, теорема остается верной в случае нарушения ее условий на множестве нулевого объема.

Пример 1. Переход к цилиндрическим координатам. Он осуществляется с помощью функций: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$.

При этом якобиан равен

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Пример 2. Переход к сферическим координатам осуществляется функциями $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$.

Якобиан преобразования равен

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{vmatrix} =$$

(разложение определителя по 3-й строке)

$$= r \cos \psi \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi \end{vmatrix} + \sin \psi \begin{vmatrix} -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \end{vmatrix} =$$

(выделение общих множителей у столбцов)

$$r^2 \cos^3 \psi \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} + r^2 \sin^2 \psi \cos \psi \begin{vmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{vmatrix} = r^2 \cos^3 \psi + r^2 \sin^2 \psi \cos \psi =$$

$$= r^2 \cos \psi (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = r^2 \cos \psi.$$

Часто используется интеграл (вы встретите его при вычислении двойных, тройных интегралов при переходе к сферическим или цилиндрическим координатам)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} \varphi \cos^{n-1} \varphi d\varphi, \quad m, n > 0.$$

Сведем его к значениям эйлеровых интегралов см. приложение 2:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} \varphi \cos^{n-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{m-1} (1 - \sin^2 \varphi)^{n-2} \cos \varphi d\varphi = |x = \sin \varphi| =$$

$$= \int_0^1 x^{m-1} (1 - x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx = |x^2 = y, x = \sqrt{y}, x^{m-1} = y^{(m-1)/2}, dx = 1/(2\sqrt{y}) dy| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{(m-1)/2} (1 - y)^{\frac{n}{2}-1} dy = \frac{1}{2} \int B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})}.$$

Глава 3. Криволинейные интегралы

§1. Криволинейные интегралы первого типа

Рассмотрим спрямляемую (т.е. имеющую длину) кривую AB на плоскости (A, B – точки плоскости). Для простоты, считаем, что эта кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]$, причем $x(t), y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке функции такие, что каждому значению параметра соответствует единственная точка кривой.

Тогда длина кривой выражается формулой

$$l = \int_{T_0}^{T_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Под **разбиением** T кривой AB будем понимать множество точек $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$, лежащих на этой кривой и занумерованных в направлении от A к B . Пусть Δl_i – длина участка кривой A_{i-1}, A_i .

Диаметр $d(T)$ определим как $d(T) = \max_{i=1, \dots, n} \Delta l_i$.

Пусть функция $f(M) = f(x, y)$ определена на кривой AB . Выберем на каждом участке $A_{i-1}A_i$ кривой точку M_i и образуем сумму $\sigma(f, T, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i$,

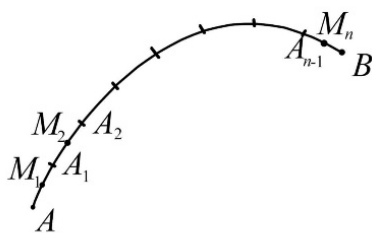
называемую **интегральной**.

Определение 3.1.1. Пусть $I \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T : d(T) < \delta \forall \{M_i\} | \sigma(f, T, \{M_i\}) - I | < \varepsilon$,

то величина I называется **криволинейным интегралом первого типа** по кривой AB и обозначается так: $I = \int_{AB} f(M) dl = \int_{AB} f(x, y) dl$.

Снова отметим, что входящие в это определение величины не зависят от выбора какой-либо системы координат. Второе обозначение, содержащее координаты, традиционное и напоминает, что для вычисления интеграла удобно вводить систему координат.

Важное замечание. Если бы мы совершали движение по кривой не от A к B ,



а от B к A , то в разбиении T с выбранными точками $\{M_i\}$ изменилась бы только нумерация отрезков и точек M_i , а сама интегральная сумма не изменилась бы, поскольку в ее определении фигурирует лишь длина Δl_i участка, которая не зависит от того, в каком направлении проходится участок. Это означает, что

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl.$$

В этом важнейшее отличие от обычного определенного интеграла, который меняет знак при изменении пределов интегрирования ($\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$).

Сформулируем теорему, сводящую новый объект - криволинейный интеграл к обычному определенному интегралу. Определим вспомогательное понятие непрерывности функции на кривой.

Будем говорить, что $f(M)$ - **непрерывная на кривой AB функция**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall M_1, M_2$ (M_1, M_2 - точки кривой такие, что расстояние между M_1, M_2 меньше δ ,) выполняется неравенство $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$.

Теорема 3.1. Пусть $f(M)$ - непрерывная на кривой AB функция и пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]$, где $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ - непрерывные на $[T_0; T_1]$ функции, причем каждому значению параметра соответствует единственная точка кривой. Тогда

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{T_0}^{T_1} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

► **Схема доказательства.** Интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(M_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

для криволинейного интеграла первого типа отличается от интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i)) \sqrt{(x'(t_i))^2 + (y'(t_i))^2} \Delta t_i$$

для интеграла

$$\int_{T_0}^{T_1} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

лишь тем, что величина

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

несколько отличается от величины

$$\sqrt{(x'(t_i))^2 + (y'(t_i))^2} \Delta t_i.$$

А именно, этот интеграл, по теореме о среднем, равен

$$\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \Delta t_i, \text{ где } \xi_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

Нетрудно доказать, что при $d(T) \rightarrow 0$ пределы этих сумм равны (строгое доказательство опущено). Это означает, что утверждение теоремы справедливо. ◀

Замечание. Иногда возникает сомнение: мы выразили криволинейный интеграл первого типа, который не меняет свой знак при изменении направления обхода кривой с помощью обычного интеграла, который должен менять знак при изменении пределов интегрирования? Отметим, что изменение направления обхода кривой означает одновременную смену пределов интегрирования и знака величины dt , что не изменяет величину интеграла в правой части этого равенства.

Из свойств криволинейного интеграла отметим следующие 2 основных:

$$1. \int_{AB} (\lambda_1 f_1(M) + \lambda_2 f_2(M)) dl = \lambda_1 \int_{AB} f_1(M) dl + \lambda_2 \int_{AB} f_2(M) dl$$

$$\text{при условии, что существуют } \int_{AB} f_1(M) dl \text{ и } \int_{AB} f_2(M) dl.$$

2. Если AB, BC - кривые, удовлетворяющие условиям теоремы, то

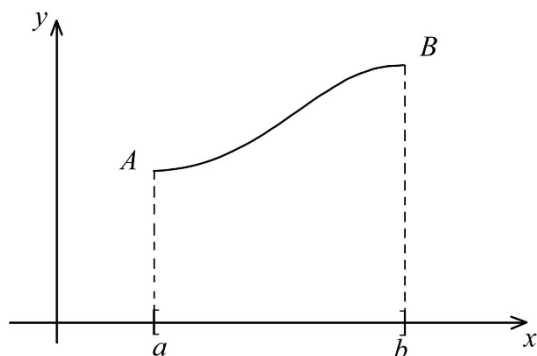
$$\int_{AC} f(M) dl = \int_{AB} f(M) dl + \int_{BC} f(M) dl.$$

Эти свойства называются линейностью и аддитивностью интеграла.

Свойство 2 позволяет определить криволинейные интегралы 1-го типа для кусочно-гладких кривых (т.е. кривых, состоящих из конечного числа частей, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы). В частности, можно определить криволинейный интеграл и для замкнутых кривых.

§2. Криволинейные интегралы второго типа

Рассмотрим, как и в параграфе 1, кривую AB , которую пока считаем незамкнутой. Будем считать, что введена декартова система координат.



Пусть проекция этой кривой на ось x представляет собой отрезок $[a; b]$.

Пусть точки $A_0, \dots, A_n$ задают разбиение кривой AB . Рассмотрим их проекции $x_0, \dots, x_n$, лежащие на отрезке $[a; b]$ и обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$.

Пусть функция $P(x, y) = P(M), ((x, y) = M)$ определена на кривой AB . Пусть M_i - точка, лежащая на кривой между A_{i-1} и A_i . Положим $\sigma = \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i$.

Определение 3.2.1. Пусть $I \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon \exists T : d(T) < \delta \quad \forall \{M_i\} \quad |\sigma - I| < \varepsilon$, то говорят, что I — это **криволинейный интеграл второго типа** $\int_{AB} P(x, y) dx$.

Точно также, рассматривая проекции на ось y , определим $\int_{AB} Q(x, y) dy$.

Интеграл общего вида $\int_{AB} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$ определяется, как сумма этих двух интегралов. Он также обладает свойствами линейности и аддитивности.

Вычисление криволинейного интеграла 2-го типа проводится в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 3.2. Пусть $f(M)$ - непрерывная на кривой AB функция и пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]$, где

$x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ - непрерывные на $[T_0; T_1]$ функции, причем каждому значению параметра соответствует единственная точка кривой. Тогда

$$\int_L (Pdx + Qdy) = \int_{T_0}^{T_1} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

Теорему оставим без доказательства.

Примечание 1.

- а) Если кривая L задана явным уравнением $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, где $\varphi(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, то предыдущая формула принимает вид:

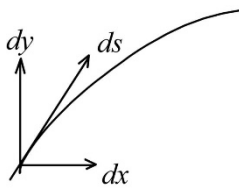
$$\int_L (Pdx + Qdy) = \int_a^b P(x, \varphi(x))dx + \int_a^b Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

- б) Если L задана уравнением $x = \psi(y)$, $c \leq y \leq d$, то

$$\int_L (Pdx + Qdy) = \int_c^d P(\psi(y), y)\psi'(y)dy + \int_c^d Q(\psi(y), y)dy.$$

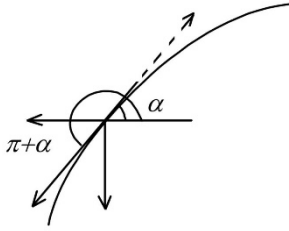
- с) Если L - отрезок прямой $x = x_0$, то $\int_L Pdx \equiv 0$ для любой функции P , если L - отрезок прямой $y = y_0$, то $\int_L Qdy \equiv 0$ для любой функции Q .

Примечание 2.



Пусть α - угол, составляемый вектором касательной к кривой и положительным направлением оси x . Тогда $dx = ds \cos \alpha$, $dy = ds \sin \alpha$. Поэтому

$$\int_L (Pdx + Qdy) = \int_L (P \cos \alpha + Q \sin \alpha)dl = \int_L \bar{F}d\bar{r}.$$



Заметим, что при изменении направления обхода угол α изменяется на $\pi + \alpha$. При этом $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$, $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$, и интеграл в правой части написанного выше равенства меняет свой знак.

Примечание 3. В случае пространственной кривой $L: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, где x, y, z, x', y', z' - непрерывные на $[T_0; T_1]$ функции, а f - непрерывна на L , то

$$\int_L f(M) dl = \int_{T_0}^{T_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Аналогично, для непрерывных на L функций P, Q, R имеем

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_{T_0}^{T_1} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt.$$

Примечание 4. Говорят, что на области $D \subset \mathbb{R}^2$ задано *векторное поле* $\vec{F} = (P, Q)$, если каждой точке $(x, y) \in D$ сопоставлен вектор $(P(x, y), Q(x, y))$. Обозначим $\vec{r} = (x, y)$ - радиус-вектор точки (x, y) и обозначим $d\vec{r} = (dx, dy)$. Тогда

$Pdx + Qdy = (P, Q) \cdot (dx, dy) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (скалярное произведение). Поэтому

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

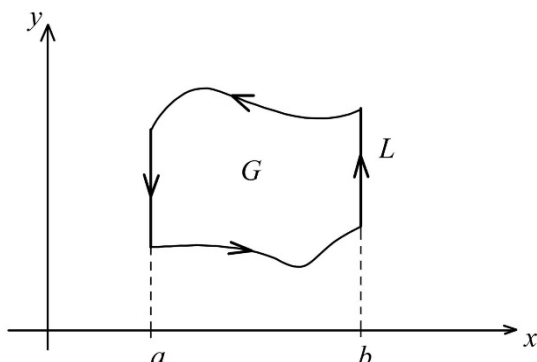
Последнее выражение означает, что под знаком интеграла стоит скалярное произведение вектора $\vec{F}$ на вектор касательной к кривой $d\vec{r}$, а эти величины можно определить и не вводя систему координат.

Из физики известно, что эта величина представляет собой работу силы $\vec{F}$ вдоль кривой L .

§3. Формула Грина

Эта формула обобщает формулу Ньютона-Лейбница.

Теорема 3.3. Пусть G - криволинейная трапеция: $a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, где $\phi_1(x), \phi_2(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции, L - граница области G и направление обхода L выбрано так, что область G остается слева.



Пусть $P(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \in C(G)$. Тогда $\oint_L P dx = - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$.

Знак $\oint_L$ означает, что контур интегрирования L - замкнутый. Часто используется обозначение $L = \partial G$ (т.е. L - граница области G).

► Вычислим двойной интеграл $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$, используя теорему Фубини:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

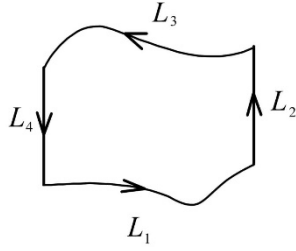
При каждом фиксированном $x \in [a; b]$ величина $\frac{\partial P}{\partial y}$ определяется, как производная по y функции от одной переменной $y, P(x, y)$. Поэтому при каждом $x \in [a; b]$ применима формула Ньютона-Лейбница, согласно которой

$$\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x)).$$

Поэтому

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = \int_a^b dx (P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))) = \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx.$$

Разобьем кривую L на 4 участка, обозначенные на рисунке L_1, L_2, L_3, L_4 .



Согласно **с)** из примечания **1** предыдущего параграфа, $\int_{L_2} P dx = 0$, $\int_{L_4} P dx = 0$. По правилу

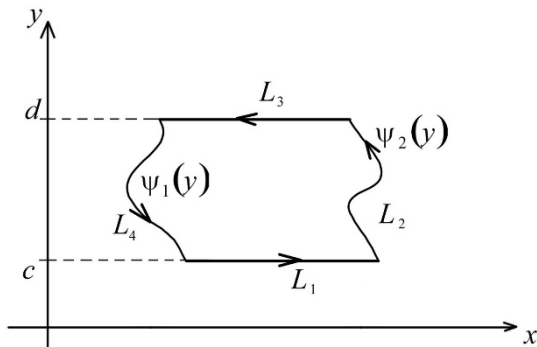
из **а)** примечания **1**,

$$\int_{L_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx, \int_{L_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx.$$

Поэтому

$$\oint_L P dx = \int_{L_1} P dx + \int_{L_2} P dx + \int_{L_3} P dx + \int_{L_4} P dx = \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx = - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \blacktriangleleft$$

Теорема 3.4. Пусть G - криволинейная трапеция $c \leq y \leq d$, $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, где $\psi_1(y), \psi_2(y)$ - непрерывно дифференцируемые на $[c; d]$ функции, граница области G и направление обхода L выбрано так, что область G остается слева.



Пусть $Q(x, y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \in C(G)$.

Тогда $\oint_L Q dy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$.

► Доказательство повторяет рассуждения предыдущей теоремы.

$$\begin{aligned}
\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy = \\
&= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy = \int_{L_1} Q(x, y) dy + \int_{L_2} Q(x, y) dy + \int_{L_3} Q(x, y) dy + \\
&\quad + \int_{L_4} Q(x, y) dy = \oint_L Q dy. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

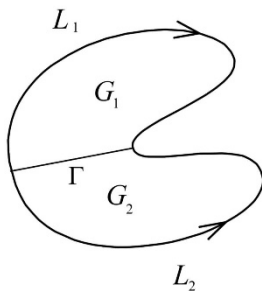
Следствие 1. Если область G можно представить как в виде криволинейной трапеции $a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, где $\phi_1(x), \phi_2(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции, так и в виде трапеции $c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, где $\psi_1(y), \psi_2(y)$ - непрерывно дифференцируемые на $[c; d]$ функции, L - граница области, причем при ее обходе область G остается слева, то

$$\oint_L (P dx + Q dy) = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Примечание. Области, удовлетворяющие условиям следствия 1 - явление обычное. Например, круг $x^2 + y^2 \leq 1$, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$, можно задать так: $-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, а можно и так: $-1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$.

Следствие 2. Если область G можно разбить кривыми на конечное число областей, удовлетворяющих условиям следствия 1 и L - граница G , причем направление обхода выбрано так, что область G остается слева, и P и Q удовлетворяют перечисленным выше условиям, т.е. $P(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \in C(G)$ и $Q(x, y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \in C(G)$, то

$$\oint_L (P dx + Q dy) = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$



Ограничимся случаем, когда область G разбивается на 2 части G_1 и G_2 , удовлетворяющие условиям следствия 1, кривой Γ . Пусть L_1 ограничивает G_1 , а L_2 ограничивает G_2 . Тогда $\oint_L (Pdx + Qdy) = \oint_{L_1} (Pdx + Qdy) + \oint_{L_2} (Pdx + Qdy)$, поскольку L_1 - это часть L и кривая Γ , а L_2 - остаток L и кривая Γ , но проходимая в противоположном направлении (поэтому интегралы по Γ сократятся). ◀

§4. Независимость криволинейного интеграла от формы пути интегрирования

Пусть D область. Эта область называется **односвязной**, если вместе с любым замкнутым контуром L , лежащим в D , ограничиваемая контуром L область G также целиком содержится в D . В дальнейшем предполагаем, что контур представляет собой кусочно-гладкую замкнутую кривую.



Пример односвязной области: круг

Пример неодносвязной области: круг с выколотой точкой. G содержит выколотую точку, а D - нет, следовательно G не входит в D целиком.

Теорема 3.5. Пусть D - односвязная область, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$.

Условие, что $\forall L \subset D$ выполнено равенство $\oint_L (Pdx + Qdy) = 0$ равносильно тому, что

всюду в этой области выполнено равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

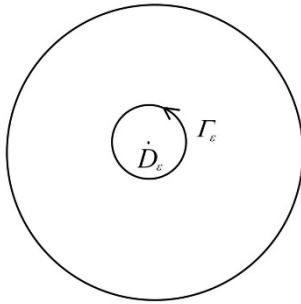
►

1. Если всюду в D выполнено равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то $\forall L \subset D$ по формуле Грина

$$\oint_L (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 0 \cdot dxdy = 0.$$

2. Предположим, что в области D есть точка $(x_0; y_0)$, в которой $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$.

Пусть, для определенности, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x_0; y_0) = c > 0$.



Тогда, ввиду непрерывности функции $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ существует окрестность точки

$(x_0; y_0)$, в которой значения $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ больше, чем $\frac{c}{2}$. Выберем в этой

окрестности окружность Γ_ε радиуса ε и рассмотрим $\oint_{\Gamma_\varepsilon} (Pdx + Qdy)$.

По формуле Грина

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} Pdx + Qdy = \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > \frac{c}{2} \text{пл.}(D_\varepsilon) = \frac{c}{2} \pi \varepsilon^2 > 0.$$

Это противоречит предположению о том, что $\oint_{\Gamma_\varepsilon} Pdx + Qdy$ должен быть равен 0. ◀

Перейдем к вопросу о независимости интеграла от формы пути интегрирования и рассмотрим два интеграла:

$$\int_{OA} (2xydx - x^2 dy) \quad \text{и} \quad \int_{OA} (2xydx + x^2 dy),$$

вдоль различных путей, соединяющих точки $O(0,0)$ и $A(2,1)$.

Если мы рассматриваем отрезок прямой, соединяющей эти точки, то, поскольку уравнение этой прямой имеет вид $y=x/2$, получаем

$$\int_{OA} (2xydx - x^2 dy) = \int_0^2 (x^2 dx - \frac{x^2}{2} dx) = \int_0^2 x^2/2 dx = 4/3,$$

$$\int_{OA} (2xydx + x^2 dy) = \int_0^2 (x^2 dx + x^2/2 dx) = \int_0^2 3/2 x^2 dx = 4.$$

Если взять эти интегралы вдоль кривой, заданной уравнением $y = \frac{x^2}{4}$, то

$$\int_{OA} 2xydx - x^2 dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} dx - \frac{x^3}{2} dx \right) = 0,$$

$$\int_{OA} (2xydx + x^2 dy) = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} dx + \frac{x^3}{2} dx \right) = \int_{OA} x^3 dx = \frac{x^4}{4} = 4.$$

Наконец, интегрирую вдоль кривой $y = \sqrt{x/2}$, получаем

$$\int_{OA} (2xydx - x^2 dy) = \int_0^2 \left(\sqrt{2}x^{3/2} - \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{2}} \right) dx = \int_0^2 \frac{3\sqrt{2}}{4} x^{3/2} dx = \frac{12}{5},$$

$$\int_{OA} (2xydx + x^2 dy) = \int_0^2 \left(\sqrt{2}x^{3/2} + \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{2}} \right) dx = \int_0^2 \frac{5\sqrt{2}}{4} x^{3/2} dx = 4.$$

Мы видим, что первый из интегралов меняет свою величину в зависимости от того, какую форму имеет кривая, соединяющая точки O и A . Во всех рассмотренных примерах второй из интегралов имеет одну и ту же величину. Можно было бы рассматривать и другие кусочно-гладкие кривые, соединяющие точки O и A . Вторым из рассматриваемых интегралов был бы всё время равен 4.

Более того, можно доказать (это будет следовать из дальнейших рассмотрений), что если рассматривать произвольные точки C и D на плоскости и произвольные кусочно-гладкие кривые, соединяющие эти точки, то величина $\int_{CD} (2xydx + x^2 dy)$ зависит только от точек C и D и не зависит от того, вдоль какой из кривых, соединяющих эти точки, производится интегрирование.

Определение 3.1. Криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (Pdx + Qdy)$$

не зависит от формы пути в области D , если для любых точек $A, B \in D$ и любых кривых Γ_1, Γ_2 , целиком лежащих в D и соединяющих точки A, B выполняется равенство

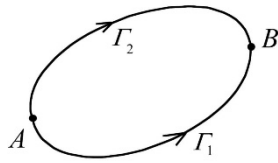
$$\int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy).$$

Теорема 3.6. Пусть D - область. Условие независимости $\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy)$ от формы пути в

D равносильно тому, что для любого замкнутого контура $L \subset D$ $\oint_L (Pdx + Qdy) = 0$.



1. Пусть интеграл не зависит от формы пути и пусть L - замкнутый контур в D .
Выберем на L две произвольные точки A и B и рассмотрим



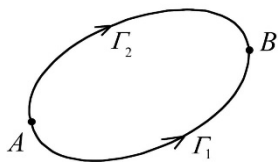
соединяющие эти точки части контура L , назовем их Γ_1 и Γ_2 . При этом L состоит из Γ_1 и проходимого в противоположном направлении контура Γ_2 . По условию,

$$\int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy).$$

$$\text{Значит, } \oint_L (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) - \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy) = 0.$$

2. Пусть для любого контура $L \subset D$ выполняется равенство $\oint_L (Pdx + Qdy) = 0$.

А) В случае, если Γ_1 и Γ_2 , соединяющие точки A, B не имеют других общих

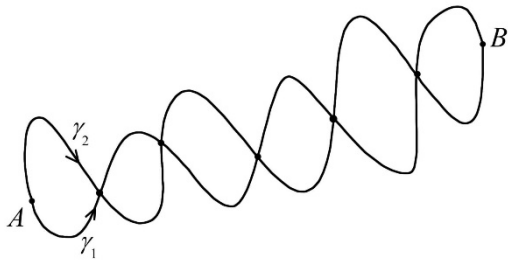


точек, то, как и в предыдущей части, L состоит из кривой Γ_1 и проходимой в противоположном направлении кривой Γ_2 . Поэтому

$$0 = \oint_L (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) - \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy),$$

$$\text{откуда } \int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy).$$

Б) Если Γ_1 и Γ_2 имеют конечное число общих точек, кроме A и B , то можно



применить доказанное утверждение пункта 2А) к каждому полученному контуру, интегралы по которым, в связи с предположением равен 0, и поэтому для каждой такой полученной части $\int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int_{\gamma_2} (Pdx + Qdy)$. По свойству аддитивности интеграла получаем $\int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy)$.

В) Случай, когда кроме A и B кривые Γ_1 и Γ_2 имеют бесконечное множество общих точек, мы оставим без доказательства.

Сопоставляя теорему 3.5 с теоремой 3.6, получаем следствие.

Следствие. Пусть D - односвязная область. $\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy)$ не зависит в D от формы пути интегрирования тогда и только тогда, когда в этой области выполняется тождество $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

§5. Связь с вопросом о полном дифференциале

Если $u(x, y)$ - дифференцируемая функция двух переменных, то её дифференциал равен $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

Выясним, при каких условиях на функции P, Q выражение $Pdx + Qdy$ представляет собой полный дифференциал, т.е. когда существует такая функция u , что $Pdx + Qdy = du$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

В предположении непрерывности смешанных производных должно выполняться равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ (теорема Шварца из 2-го семестра), или

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Докажем, что если D - односвязная область, то верно и обратное.

Теорема 3.7. Если в односвязной области D выполняется равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то существует дифференцируемая функция $u(x, y)$ такая, что $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

► Возьмем произвольную точку $A(x_0, y_0)$ и рассмотрим переменную точку $B(x, y)$ и любую кривую Γ , соединяющую A с B .

По следствию теоремы 2, $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy$ зависит только от конечной точки $B(x, y)$ и,

значит, есть некоторая функция $u(x, y)$. Покажем, что $u(x, y)$ - искомая функция, т.е.

$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Для этого рассмотрим точку $(x + \Delta x, y)$ и рассмотрим

$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{\Gamma'} Pdx + Qdy$, где Γ' - отрезок прямой, соединяющей точки

$(x + \Delta x, y)$ и (x, y) . На этом отрезке $dy \equiv 0$ и $\int_{\Gamma'} Pdx + Qdy = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y)dx$. Применяя теорему

о среднем, получаем (ввиду непрерывности P), что $\int_x^{x+\Delta x} P(x, y)dx = P(x + \theta\Delta x, y) \cdot \Delta x$,

где $0 < \theta < 1$.

Тогда

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta\Delta x, y) = P(x, y).$$

Для Q доказательство аналогичное. ◀

Замечание. Если векторное поле $\vec{F} = (P, Q)$ обладает свойством $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в

односвязной области D , то говорят, что $\vec{F}$ - потенциальное поле и найденная

функция u такая, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$, т.е. $\vec{F} = \nabla u$, называется **потенциалом** поля $\vec{F}$

($F = \text{grad } u$).

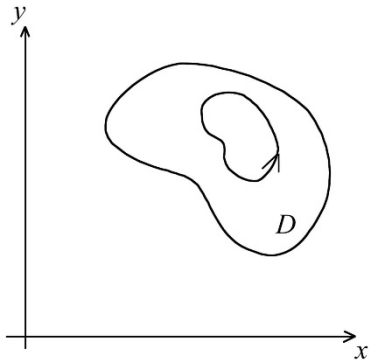
По определению, если кривая Γ соединяет A и B , то **работа силового поля $\vec{F}$ вдоль кривой Γ** равна $\int_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy$.

Следствие. Если кривая Γ соединяет точки A и B , то **работа потенциального поля $\vec{F}$ вдоль Γ равна разности потенциалов $u(B) - u(A)$.**

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int_{\Gamma} \overline{F} d\overline{r} &= \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int_{T_0}^{T_1} [P(x(t), y(t))x'(t)dt + Q(x(t), y(t))y'(t)dt] = \int_{T_0}^{T_1} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t)dt + \right. \\ &\left. + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)dt \right] = \int_{T_0}^{T_1} \frac{du(x(t), y(t))}{dt} dt = u(x(T_1), y(T_1)) - u(x(T_0), y(T_0)) = u(B) - u(A). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

В частности, в потенциальном поле работа вдоль любого замкнутого контура Γ равна 0.

Примечание. Условие односвязности области существенно для справедливости теоремы 3.5.



Например, если область D не содержит начала координат, то функции

$$\left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \text{ и } \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right), \text{ а также и их производные}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

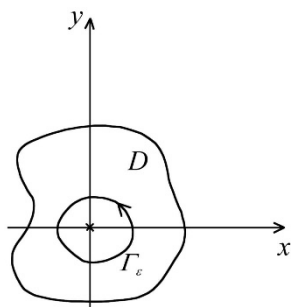
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(-x^2 - y^2) - 2y(-y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

непрерывны в односвязной области D . Кроме того, выполнено равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

По теореме 3.5 $\forall L \subset D$ выполнено равенство $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$.

С другой стороны, пусть рассматриваемая область D содержит точку $(0;0)$.



Рассмотрим Γ_ε - окружность радиуса ε , содержащуюся в D . Рассмотрим параметрические уравнения этой окружности:

$$\begin{cases} x = \varepsilon \cos t, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \varepsilon \sin t \end{cases}.$$

Тогда, по теореме 3.2 имеем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(\varepsilon \cos t \cdot \varepsilon \cos t + \varepsilon \sin t \cdot \varepsilon \sin t)}{\varepsilon^2 \cos^2 t + \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

То, что не выполнено заключение теоремы 3.5 связано с тем, что область, в которой непрерывны $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ не является односвязной.

Глава 4. Поверхностные интегралы

§1. Площадь поверхности, заданной явным уравнением

Определим сначала площадь поверхности S , заданной явным уравнением

$$z = z(x, y), (x, y) \in D, \quad (1)$$

где D - плоская область. Примерами таких поверхностей служат изученные Вами в курсе аналитической геометрии плоскости и параболоиды, многие другие поверхности. Предположим, что функция $z(x, y)$ и её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

непрерывны в области D . Это будет кратко обозначаться так: $z \in C^1(D)$.

Пусть $(x_0, y_0, z_0) \in S$, т.е. $z_0 = z(x_0, y_0)$. Уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке имеет вид:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Далее в этом параграфе мы будем для краткости обозначать $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$. Напомним, что в общем уравнении плоскости $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ числа A, B, C представляют собой координаты перпендикулярного к этой плоскости вектора. Значит, $(z'_x, z'_y, -1)$ - нормальный вектор к касательной плоскости к поверхности S в точке (x_0, y_0, z_0) . Будем называть любой вектор, перпендикулярный к касательной плоскости к поверхности S в точке (x_0, y_0, z_0) . **нормальным вектором к поверхности S в точке (x_0, y_0, z_0) .** Вектор $(z'_x, z'_y, -1)$, вообще говоря, не единичный. Чтобы сделать его единичным, его следует умножить на один из нормирующих множителей, т.е. на одно из чисел $\pm \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}$. Итак, два единичных вектора нормали к поверхности в

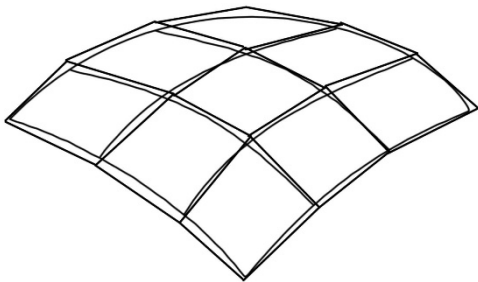
рассматриваемой точке имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \left(\frac{-z'_x}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} \right) \\ \bar{n}_2 &= \left(\frac{z'_x}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{z'_y}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} \right). \end{aligned}$$

Известно, что координаты единичного вектора – это косинусы углов, составляемых этим вектором с осями x, y, z (т.е. с положительными направлениями этих осей), соответственно. Пусть $\bar{n}_1 = (\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$, $\bar{n}_2 = (\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2)$. Очевидно, что $\bar{n}_1 = -\bar{n}_2$. Это означает, что справедливы равенства $\alpha_1 = \pi + \alpha_2$, $\beta_1 = \pi + \beta_2$, $\gamma_1 = \pi + \gamma_2$.

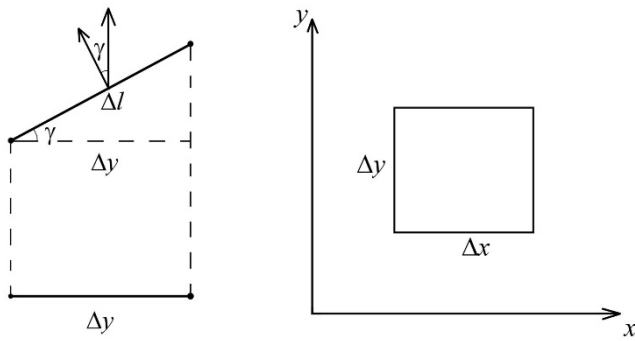
Предположим, что мы рассматриваем разбиение T этой поверхности на части $S_i, i = 1, \dots, n$ непрерывными кусочно-гладкими кривыми. Под **диаметром множества** S_i понимается точная верхняя грань расстояний между точками этого множества. **Диаметр разбиения** T – это наибольший из диаметров получившихся частей. Обозначают его $d(T)$.

В каждой полученной части поверхности выберем точку (x_0, y_0, z_0) и рассмотрим касательную плоскость к поверхности в этой точке. Пересечения касательных плоскостей ограничат многоугольники, которые образуют «панцирь» на поверхности. Этот «панцирь» состоит из плоских многоугольников и, следовательно, имеет площадь, равную сумме площадей составляющих его многоугольников.



Если при стремлении к 0 диаметра разбиения площади «панцирей» имеют конечный предел, то он и называется **площадью поверхности, заданной явным уравнением**.

Найдём формулу для вычисления площади такой поверхности. Рассмотрим плоский многоугольник, нормаль к которому имеет направляющие косинусы $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Рассмотрим случай $\cos \gamma > 0$.



Без ограничения общности, достаточно рассматривать прямоугольник, причём, для простоты, считаем, что его проекция на плоскость $z = 0$ есть прямоугольник со сторонами $\Delta x, \Delta y$, а сам он имеет стороны $\Delta x, \Delta l$.

Тогда

$$\Delta y = \Delta l \cos \gamma \text{ и } \text{пл.}(S) = \Delta x \cdot \Delta l = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\cos \gamma} \quad (\cos \gamma > 0).$$

В общем случае $\text{пл.}(S) = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{|\cos \gamma|}$.

Если нормали выбирались в точках (x_i, y_i, z_i) , то пусть $(\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$ – их направляющие косинусы. Согласно сказанному выше, площадь «панциря» есть

$$\sum_{i=1}^n \text{пл.}(S_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{|\cos \gamma_i|}.$$

Эта сумма является интегральной суммой для двойного

интеграла $\iint_D \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}$. Как установлено выше,

$$|\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \text{ поэтому } S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy.$$

§2. Площадь поверхности, заданной параметрическими уравнениями

Часто поверхности удобно задавать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

где $(u, v) \in \Delta$, а Δ – некоторая плоская область, ограниченная кусочно-гладкими кривыми. Пусть $x, y, z \in C^1(\Delta)$.

Кроме того, пусть в любой точке Δ ранг матрицы $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ равен 2. Это означает, что в любой точке Δ хотя бы один из миноров второго порядка этой матрицы не равен 0. Если, скажем, в некоторой точке $C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$, то это означает (вспомним сформулированную в конце второго семестра теорему о системе неявных функций), что уравнения $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ можно решить, выразив в окрестности этой точки переменные u, v через переменные x, y , т.е. получить равенства вида $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Подставив эти выражения в уравнение $z = z(x, y)$, получим уравнение $z = z(u(x, y), v(x, y)) = Z(x, y)$, т.е. в окрестности рассматриваемой точки поверхность может быть задана явным уравнением вида (1). (Если другой минор, например,

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то имеем, по аналогии, $X = X(y, z)$, а если минор

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ то } Y = Y(x, z).$$

Обозначим символом $\bar{r}(u, v)$ вектор $\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$. Рассмотрим произвольную точку

$(u_0, v_0) \in \Delta$. Зафиксируем сначала v_0 и рассмотрим $\bar{r}(u, v_0)$ – кривую на поверхности.

Тогда

$$\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} -$$

вектор касательной к этой кривой. Аналогично, $\bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ - вектор касательной к кривой $\bar{r}(u_0, v)$.

Нормаль к поверхности является нормалью к касательной плоскости и перпендикулярна $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$. Условие

$$rg \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

означает, что $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$ не параллельны. Поэтому в качестве нормального вектора можно взять $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$ (векторное произведение) или

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \bar{k} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}.$$

Тогда единичные векторы нормали равны

$$\left(\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right), \text{ при этом выборе верхней}$$

нормали соответствует выбор того же знака, что и знак числа C, перед корнем (поскольку тогда $\cos \gamma > 0$).

Если поверхность задана параметрическими уравнениями, то, как указывалось выше, в окрестности любой её точки её возможно задать явным уравнением ($z = z(x, y)$), или $x = x(y, z)$, или $y = y(x, z)$.

Предположим, что поверхность, заданная параметрическими уравнениями, представляет собой объединение конечного числа частей, каждая из которых задана явным уравнением, и рассмотрим одну из её частей, для которой $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. Тогда площадь этой части, по доказанному выше, равна

$$\iint_D \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}.$$

Перейдём в этом интеграле к переменным u, v , учитывая, что якобиан

перехода – это как раз определитель C, а $|\cos \gamma| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, и пусть области D

соответствует область Δ_0 на плоскости (u, v) . Тогда по теореме 1.5 (о замене переменных в двойном интеграле)

$$\iint_D \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \iint_{\Delta_0} \frac{|C| du dv}{|C| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \iint_{\Delta_0} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv.$$

Легко проверить, что в случае уравнения $x = x(y, z)$ или $y = y(x, z)$ получится интеграл такого же вида: $\iint_{\Delta_i} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv, i = 1, 2$.

Объединяя все полученные части, получаем общую площадь $\iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$, где Δ - вся область изменения параметров (u, v) .

Отметим, что выражение $A^2 + B^2 + C^2$ можно преобразовать к более удобному для вычислений виду.

Числа (A, B, C) являются координатами вектора $\overline{r_u} \times \overline{r_v}$. Поэтому $A^2 + B^2 + C^2$ - квадрат модуля вектора $\overline{r_u} \times \overline{r_v}$. Напомним, что модуль векторного произведения равен $|\overline{r_u}| |\overline{r_v}| \sin \phi$ (ϕ - угол между $\overline{r_u}$ и $\overline{r_v}$). Значит, $A^2 + B^2 + C^2 = r_u^2 \cdot r_v^2 \sin^2 \phi = r_u^2 r_v^2 (1 - \cos^2 \phi) = r_u^2 r_v^2 - r_u^2 r_v^2 \cos^2 \phi = r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v \cos \phi)^2 = r_u^2 r_v^2 - (\overline{r_u}, \overline{r_v})^2$.

Введём обозначения

$$r_u^2 = |\overline{r_u}|^2 = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = E;$$

$$r_v^2 = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = G \text{ и}$$

$$(\overline{r_u}, \overline{r_v}) = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = F.$$

Тогда $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$, и формула для площади поверхности, заданной параметрическими уравнениями, такова: $S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$.

§3. Поверхностные интегралы 1-го типа

Пусть S - поверхность, имеющая площадь пл. (S) . Рассмотрим разбиение T этой поверхности на части S_i с помощью непрерывных кусочно-гладких кривых. Пусть

функция $f(M)$ определена во всех точках поверхности S . Выберем произвольным образом точки $M_i \in S_i$ и рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \text{пл.}(S_i) = \sigma(f, T, \{M_i\}).$$

Определение. Пусть $I \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T: d(T) < \delta \forall \{M_i\} |\sigma(f, T, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$

, то мы говорим, что I есть **поверхностный интеграл 1-го типа** от функции $f(M)$ по

поверхности S и обозначаем это следующим образом: $I = \iint_S f(M) dS = \iint_S f(x, y, z) dS$.

Пример задачи, моделью которой служит поверхностный интеграл первого типа – нахождение массы поверхности S , поверхностная плотность которой в точке M равна $f(M)$.

Поверхностный интеграл первого типа обладает свойствами линейности и аддитивности. Для вычисления поверхностного интеграла 1-го типа удобно ввести систему координат и использовать следующие теоремы.

Теорема 4.1. Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_0$, где z – непрерывно дифференцируемая на квадратируемой области D_0 функция, $D_0 \subset \mathbb{R}^2$.

Тогда для любой непрерывной на поверхности S функции f выполнено равенство

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_0} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy.$$

Замечание 1. Если поверхность задана уравнением $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_1$, где y – непрерывно дифференцируемая на квадратируемой области D_1 , $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ функция, то

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_1} f(x, y(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dx dz.$$

Аналогично, в случае задания поверхности уравнением $x = x(y, z)$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_2} f(x(y, z), y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1} dy dz$$

при аналогичных условиях на область D_2 и функцию $x(y, z)$.

Теорема 4. 2. Если поверхность S задана параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned}x &= x(u, v), \\y &= y(u, v), \\z &= z(u, v),\end{aligned}\quad (u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2,$$

где x, y, z – непрерывно дифференцируемые функции на квадратируемом множестве Δ и если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на S , то

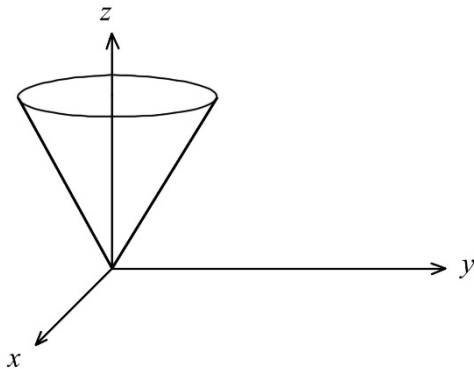
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Теоремы 1 и 2 оставим без доказательства. Вместо этого приведём пример вычисления поверхностного интеграла 1-го типа.

Задача. Найти $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, где S – граница тела, координаты точек которого

удовлетворяют неравенствам $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

Решение. Это тело представляет собой конус:



S состоит из боковой поверхности S_1 и основания S_2 . На боковой поверхности, уравнение которой имеет вид $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, всюду, кроме точки $(x, y) = (0, 0)$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ и} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1 = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Нарушение этой формулы в единственной точке $(x, y) = (0, 0)$ не повлияет на результат вычисления, поэтому $\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy$, где D – проекция

S_1 на плоскость $z = 0$, т.е. D – круг, координаты точек которого удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 1$.

В интеграле, стоящем в правой части, перейдем к полярным координатам, (см. §5 главы 1, r – якобиан преобразования):

$$\iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2) \sqrt{2} r dr = 2\pi \sqrt{2} \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \sqrt{2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{2\pi \sqrt{2}}{4} = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}.$$

Основание S_2 задано уравнением $z = 1$, поэтому $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$ и

$$\iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{2}$$

(этот интеграл отличается от вычисленного выше лишь множителем, поэтому подробное вычисление опущено).

Итак, весь интеграл равен

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

§4. Поверхностные интегралы 2-го типа

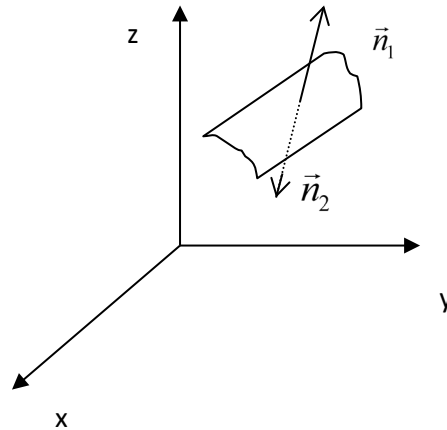
4.1. Понятие стороны поверхности

Понятие стороны поверхности интуитивно хорошо известно. Мы говорим о верхней и нижней стороне, внутренней и внешней стороне (для замкнутых поверхностей) и т. п. Однако точное определение понятия стороны поверхности и у всякой ли поверхности есть стороны – вопросы, требующий изучения.

Как обычно, проще всего обстоит дело с поверхностью, заданной явным уравнением.

$$z = z(x, y), (x, y) \in D \quad (1)$$

В этом случае, очевидно, есть 2 стороны, верхняя и нижняя. Чтобы определить сторону, достаточно установить, какой угол составляет выбранная Вами нормаль к



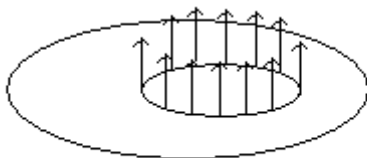
поверхности с осью z . Если $\cos \gamma > 0$, то это – верхняя сторона поверхности, поэтому ей соответствует единичный вектор нормали

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{-z'_x}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} \right).$$

Если $\cos \gamma < 0$, то это – нижняя сторона поверхности и ей соответствует единичный вектор нормали

$$\vec{n}_2 = \left(\frac{z'_x}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{z'_y}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} \right).$$

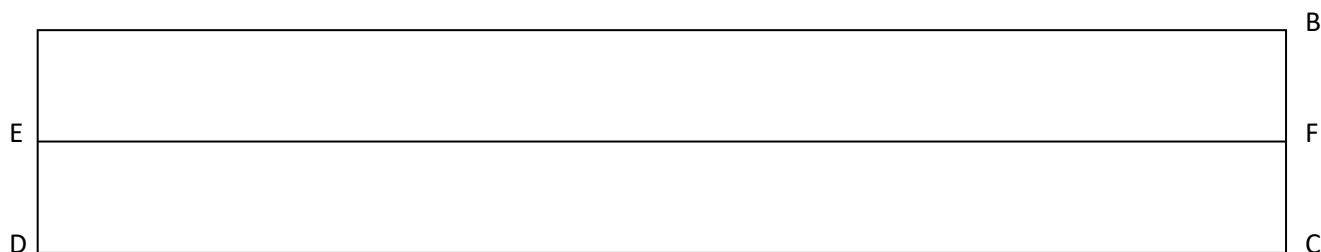
Пусть L – замкнутый контур, лежащий на поверхности и не пересекающий её край. Выберем в произвольной точке этого контура одно из двух направлений нормали. Пусть при обходе этого контура нормаль меняется непрерывно. Тогда в исходную точку мы вернёмся с исходным направлением нормали.



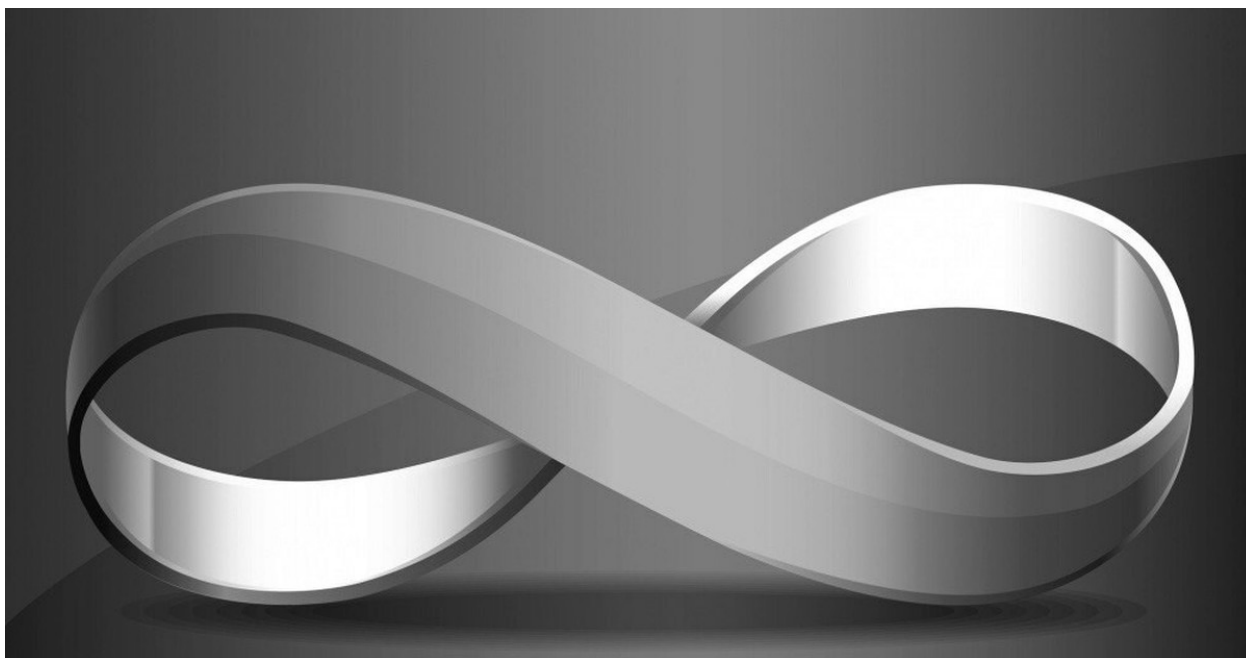
Описанное выше свойство поверхности (1) будем считать определением **двусторонней поверхности** (в общем случае, а не только для поверхностей вида (1)).

Бывают поверхности, не являющиеся двусторонними. Простейший пример – лист Мёбиуса. Он получается так:

рассмотрим прямоугольник $ABCD$ и линию EF , соединяющую середины его сторон.

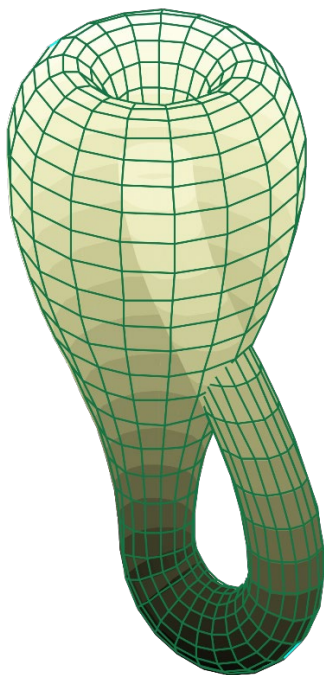


Склеим точку A с точкой C , точку B с точкой D .



Если обходить контур EF , начиная, например, с точки E , то при завершении обхода направление нормали непрерывно перейдёт в противоположное. Это доказывает, что лист Мёбиуса не является двусторонней поверхностью.

Другой интересный пример – «бутылка» Клейна. Это – тоже односторонняя поверхность, она не делит пространство на внешнюю и внутреннюю части.



В дальнейшем мы будем рассматривать только двусторонние поверхности.

4. 2. Поверхностные интегралы 2-го типа

Пусть S — двусторонняя поверхность. Вначале считаем, что она задана уравнением $z = z(x, y), (x, y) \in D_1$, где D_1 — квадратируемое множество на плоскости XOY . Как обычно, считаем, что $z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ — непрерывные на D_1 функции, и выберем верхнюю нормаль к поверхности S .

Разобьем область D_1 на квадратируемые участки $D_{1,i}$ и выберем точки $(\xi_i, \eta_i) \in D_{1,i}$ произвольным образом. Пусть функция $R(x, y, z)$ определена на поверхности S .

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \cdot \text{пл.}(D_{1,i}) = \sigma(R, T, \{\xi_i, \eta_i\})$$

Если $\exists I \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall T: D(T) < \delta \quad \forall \{\xi_i, \eta_i\} |\sigma(R, T, \{\xi_i, \eta_i\}) - I| < \varepsilon$,

то число I называется **поверхностным интегралом 2-го типа** от функции f по внешней стороне поверхности S и обозначается так: $I = \iint_S R(x, y, z) dx \wedge dy$.

(Иногда используется обозначение $I = \iint_S R(x, y, z) dx dy$.)

Если выбрана нижняя сторона поверхности S , то все величины $пл.(D_{1,i})$ в интегральной сумме заменяем на $-(пл.(D_{1,i}))$. Это означает, что поверхностный интеграл II типа (II рода) по нижней стороне поверхности отличается от интеграла по верхней стороне поверхности только знаком.

Подобно тому, как это было сделано в примечании 2 к теореме 3.2, выразим поверхностный интеграл второго типа через соответствующий интеграл первого типа. Как отмечалось выше,

$$пл.(S_i) = \frac{пл.(D_{1,i})}{|\cos \gamma_i|}, \text{ откуда } пл.(D_{1,i}) = пл.(S_i) |\cos \gamma_i|, \text{ т.е.}$$

$пл.(D_{1,i}) = -пл.(S_i) \cos \gamma_i$, если γ_i составляет с осью z острый угол,

$пл.(D_{1,i}) = -пл.(S_i) \cos \gamma_i$, если γ_i составляет с осью z тупой угол.

Поэтому при любом выборе стороны поверхности имеет место равенство:

$$\iint_S R(x, y, z) dx \wedge dy = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

Таким образом, если $R(x, y, z)$ — непрерывная функция, то

$$\iint_S R(x, y, z) dx \wedge dy = \iint_{D_1} R(x, y, z(x, y)) dx dy, \text{ если взята верхняя сторона } S \text{ и}$$

$$\iint_S R(x, y, z) dx \wedge dy = -\iint_{D_1} R(x, y, z(x, y)) dx dy, \text{ если взята нижняя сторона } S.$$

Если S задана уравнением $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_2$ — квадратуемой области плоскости XOZ и если $Q(x, y, z)$ — непрерывная функция, то определён интеграл

$$\iint_S Q(x, y, z) dz \wedge dx, \text{ равный } \iint_S Q(x, y, z) \cos \beta dS \text{ и вычисляемый по формуле}$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dz \wedge dx = \iint_{D_2} Q(x, y(x, z), z) dx dz,$$

если угол, составляемый нормалью к выбранной стороне поверхности с осью y острый, и по формуле

$$\iint_S Q(x, y, z) dz \wedge dx = -\iint_{D_2} Q(x, y(x, z), z) dx dz,$$

если этот угол тупой.

Если S задана уравнением $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_3$ – квадратируемой области плоскости YOZ и если $P(x, y, z)$ — непрерывная функция, то определён интеграл $\iint_S P(x, y, z) dy \wedge dz$, равный $\iint_S P(x, y, z) \cos \alpha dS$ и вычисляемый по формуле

$$\iint_S P(x, y, z) dy \wedge dz = \iint_{D_3} P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

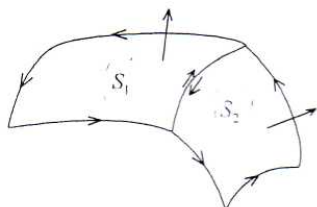
если угол, составляемый нормалью к выбранной стороне поверхности с осью x острый, и по формуле

$$\iint_S P(x, y, z) dy \wedge dz = - \iint_{D_3} P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

если этот угол тупой.

Если поверхность S можно одновременно представить уравнениями рассмотренных выше типов, то определён интеграл общего вида $\iint_S P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$.

Если поверхность S есть конечное объединение таких поверхностей и ориентации этих поверхностей согласованы, то интеграл по всей поверхности равен сумме интегралов по составляющим эту поверхность частям.



Согласованность ориентации частей поверхности означает следующее: нормали на отдельных частях этой поверхности выбраны так, что положительные направления обхода их общих границ противоположны друг другу.

В общем случае, если поверхность S задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v)$$

где $u, v \in \Delta$ – квадратируемой области и $x, y, z \in C^1(\Delta)$, то

$$\begin{aligned}
& \iint_S P(x, y, z) \cos \alpha \, dS + Q(x, y, z) \cos \beta \, dS + R(x, y, z) \cos \gamma \, dS = \\
& = \pm \iint_{\Delta} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot A(u, v) \, du \, dv \pm \iint_{\Delta} Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot B(u, v) \, du \, dv \pm \\
& \quad \pm \iint_{\Delta} R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot C(u, v) \, du \, dv
\end{aligned}$$

где, как и выше в §2 этой главы, использованы обозначения

$$A(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

(то есть эти величины - координаты нормали, равной $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$),

а знак “+” или “-”, стоящий перед ними, выбирается в соответствии с выбором стороны поверхности.

Пример. Приведём пример вычисления поверхностного интеграла 2-го типа

$$I = \iint_S x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy,$$

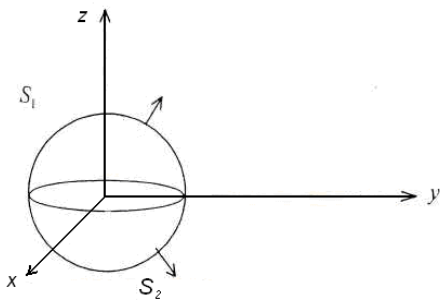
где S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Обозначим $I_1 = \iint_S z \, dx \wedge dy$. Из

соображений симметрии очевидны равенства $\iint_S x \, dy \wedge dz = \iint_S y \, dz \wedge dx = I_1$, так что $I =$

$3I_1$. Поверхность S состоит из частей S_1 и S_2 , задаваемых уравнениями

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (это S_1 - верхняя полусфера) и $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (это уравнение для

нижней полусферы S_2). На S_1 внешняя нормаль составляет с осью z острый угол, на S_2 - тупой.



Поэтому

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} z dx \wedge dy &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} d(r^2) = \\ &= -\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} d(a^2 - r^2) = -\pi \frac{2}{3} \left(\sqrt{a^2 - r^2} \right)^3 \Big|_0^a = \frac{2\pi a^3}{3}.\end{aligned}$$

Аналогично, так как на S_2 выполняется равенство $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, а нормаль составляет с осью z тупой угол,

$$\iint_{S_2} z dx \wedge dy = -\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = -\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = -\frac{2\pi a^3}{3}.$$

Значит,

$$I_1 = \iint_S z dx \wedge dy = \frac{2\pi a^3}{3} + \frac{2\pi a^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Поэтому $I = 3I_1 = 4\pi a^3$.

§5. Формула Остроградского-Гаусса

Теорема 5.1. Пусть S – замкнутая кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая тело V в пространстве. Пусть выбрана внешняя сторона S . Пусть P, Q, R – функции, имеющие непрерывные производные на V . Тогда

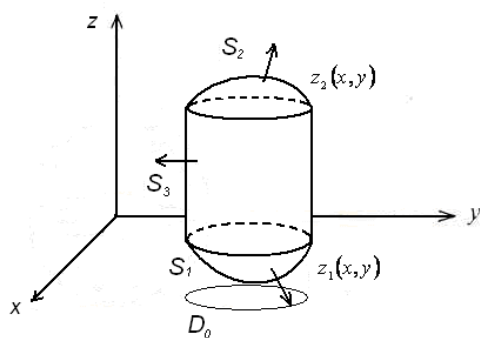
$$\oiint_S (P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Равносильная формулировка:

$$\oiint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – внешняя нормаль к S .

► Предположим, что тело V ограничено сверху поверхностью S_2 заданной уравнением $z = z_2(x, y)$, снизу поверхностью S_1 , заданной уравнением $z = z_1(x, y)$, $x, y \in D_0$, а сбоку – цилиндрической поверхностью S_3 .



Вычислим тройной интеграл, используя теорему 2.3:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_0} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{D_0} (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))) dx dy = \\ &= \iint_{D_0} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_0} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \iint_{S_2} R dx \wedge dy + \iint_{S_1} R dx \wedge dy, \end{aligned}$$

так как на поверхности S_1 внешняя нормаль составляет с осью z тупой угол и согласно пункту 4.2 имеет место равенство

$$\iint_{S_1} R(x, y, z) dx \wedge dy = - \iint_{D_0} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Далее, на боковой поверхности S_3 выполнено равенство $\cos \gamma = 0$ и, следовательно,

$$0 = \iint_{S_3} R \cos \gamma dS = \iint_{S_3} R dx \wedge dy.$$

Итак, суммируя полученные интегралы, приходим к формуле

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_1} R dx \wedge dy + \iint_{S_2} R dx \wedge dy + \iint_{S_3} R dx \wedge dy = \oint_S R dx \wedge dy.$$

Если поверхность S можно представить в виде объединения поверхностей $y = y_2(x, z)$, $y = y_1(x, z)$, $x, z \in D_1$ и цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси y , то

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oint_S Q dz \wedge dx.$$

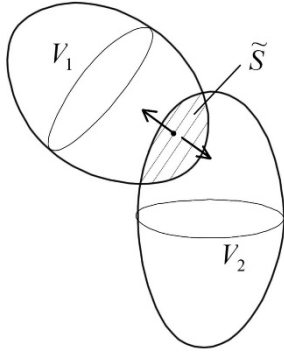
Далее, если поверхность S можно представить в виде объединения поверхностей $x = x_2(y, z)$, $x = x_1(y, z)$, $y, z \in D_2$ и цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси x , то

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oint_S P dy \wedge dz.$$

Поэтому, если поверхность S удовлетворяет условиям всех трёх случаев, то

$$\oint_S (Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Теперь предположим, что тело V состоит из конечного числа тел $V_1, \dots, V_k$, разделённых гладкими поверхностями $S_1, \dots, S_m$, причём все эти тела V_i удовлетворяют сформулированным выше условиям. Для простоты, пусть $V = V_1 \cup V_2$, S_1 ограничивает V_1 , S_2 ограничивает V_2 , S ограничивает V :



Тогда:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_{V_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz + \iiint_{V_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Каждый из интегралов

$$\iiint_{V_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \iiint_{V_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

преобразуем по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_{V_i} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_{S_i} (Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy), \quad i=1,2,$$

где взяты внешние стороны поверхностей S_i , $i=1,2$.

Поверхности S_1 и S_2 имеют общую часть $\tilde{S}$, причём их внешние нормали на поверхности $\tilde{S}$ противоположны и, следовательно, интегралы по $\tilde{S}$ взаимно сократятся, поэтому

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy + \\ & + \iint_{S_2} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \oint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy. \end{aligned}$$

Тем самым,

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

и теорема доказана. ◀

§6. Формула Стокса

Теорема 6.1. Пусть S – гладкая ориентированная двусторонняя поверхность (т.е. выбрано направление нормали) и L – кусочно гладкая кривая, ограничивающая S , причём мы считаем направление обхода кривой L положительным (см. рис). Пусть функции P, Q, R – непрерывно дифференцируемые. Тогда

$$\oint_L (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right).$$



Замечание 1. Равносильная формулировка теоремы:

$$\oint_L (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS.$$

Замечание 2. В случае плоской кривой L , лежащей на плоскости OXY и функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ эта формула совпадает с формулой Грина.

Замечание 3. Формулы в правой части запомнить непросто. Поэтому удобно записать

подынтегральное выражение в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Разумеется, это не совсем обычный определитель. Ведь во второй строке его стоят операторы дифференцирования. Поэтому условимся считать, что мы понимаем под этим определителем его формальное разложение по первой строке, причём произведение, например, оператора $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию R есть $\frac{\partial R}{\partial x}$ и т.п.

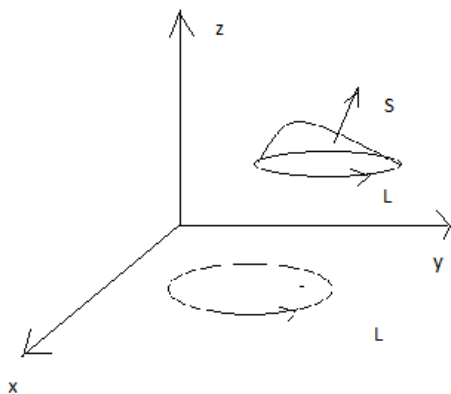
Подробнее,
$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \cos \alpha \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \cos \beta \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \cos \gamma \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} =$$

$$\cos \alpha \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \cos \beta \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \cos \gamma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \cos \alpha \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \cos \beta \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \cos \gamma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

Что совпадает с подынтегральным выражением в правой части формулы Стокса (см. замечание 1).

► Вычислим, например, $\oint_L P dx$. Пусть, для простоты, поверхность S задана явным уравнением $z = z(x, y)$, а кривая L имеет параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [T_0, T_1]$, причем $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ непрерывно дифференцируемые функции.

Проекция в кривой L на плоскость $z=0$ имеет параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T_1]$. Кривая l ограничивает на плоскости OXY область D , причем изменению параметра от T_0 до T_1 соответствует положительное направление обхода кривой l .



Докажем, что $\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_l P(x, y, z(x, y)) dx$.

Действительно, по теореме 3ю2 имеют место равенства:

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \int_{T_0}^{T_1} P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \dot{x}(t) dt,$$

$$\oint_l P(x, y, z(x, y)) dx = \int_{T_0}^{T_1} P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \dot{x}(t) dt.$$

Правые части равенства совпадают, значит, равны и их левые части, что и утверждалось.

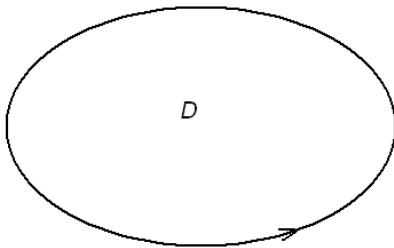
К плоской кривой l применим формулу Грина (теорема 3.3):

$$\oint_l P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

где D – ограничиваемая кривой l область плоскости OXY . По теореме о производной сложной функции вычислим

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Итак, $\oint_l P dx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy.$



Далее, $dx dy = \cos \gamma dS$. Докажем равенство

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma = -\cos \beta.$$

Действительно, нормаль $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ к поверхности S является нормалью к касательной плоскости к S , которая задается уравнением

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Следовательно, вектор $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ пропорционален вектору $(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$.

(Напомним, что вектор нормали к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ имеет координаты, пропорциональные координатам вектора (A, B, C) .)

Таким образом, $\frac{\cos \alpha}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\cos \beta}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\cos \gamma}{-1},$

откуда $\cos \alpha = -\frac{\partial z}{\partial x} \cos \gamma, \cos \beta = -\frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma.$

Значит, $\frac{\partial z}{\partial y} dx dy = \frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma dS = -\cos \beta dS$. Поэтому

$$\oint_l P dx = \iint_s \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS.$$

Аналогично получаем равенства

$$\oint_L Q dy = \iint_s \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial y} \cos \alpha \right) dS, \quad \oint_L R dz = \iint_s \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) dS.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \oint_L (P dx + Q dy + R dz) &= \iint_s \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS + \iint_s \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) dS + \\ &+ \iint_s \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) dS = \iint_s \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS. \end{aligned}$$

Формула Стокса доказана. ◀

Глава 5. Приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Элементы теории поля

§1. Скалярное и векторное поле

Определение. *Скалярное поле* на области $D \subset \mathbb{R}^3$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ - в этом случае говорят о *плоском поле*) представляет собой произвольную функцию $U(M)$, определенную на D для точек $M \in D$.

Поверхности уровня скалярного поля - это множества решений уравнения $U(M) = C$, $C \in \mathbb{R}$ при заданных значениях C .

Пример. На географической карте *линии уровня* (двумерный аналог поверхности уровня) показывают точки, лежащие на одной высоте. Аналогичные примеры - изотермы, изобары и т.д.

Определение. *Векторное поле* $\vec{F}$ на области $D \subset \mathbb{R}^3$ ($D \subset \mathbb{R}^2$) - это вектор, координаты которого (P, Q, R) (соответственно, (P, Q)) являются функциями, определенными на D .

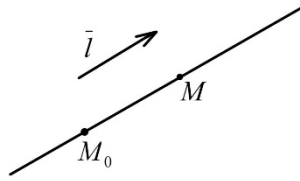
Примеры этих понятий - силовое поле, поле скоростей и т.п.

§2. Производная скалярного поля по направлению. Градиент скалярного поля

Во 2-м семестре мы уже рассматривали производную $\frac{\partial U}{\partial l}$ плоского поля (т.е. $D \subset \mathbb{R}^2$)

по направлению l . Понятие величины отрезка M_0M определяется аналогично и для области $D \subset \mathbb{R}^3$. Напоминаем: *величина* M_0M отрезка $\overline{M_0M}$ представляет собой его длину со знаком "+", если векторы $\overline{M_0M}$ и $\vec{l}$ одинаково направлены и длину со знаком "-", если их направления противоположны. Тогда, по определению,

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{U(M) - U(M_0)}{M_0M}.$$



Если введена система прямоугольных декартовых координат и вектор $\bar{l}$ задан направляющими косинусами $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, то при условии дифференцируемости U в т. M_0 аналогично двумерному случаю можно доказать формулу:

$$\frac{\partial U}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) \cos \gamma = (\text{grad} U, \bar{l}), \text{ где}$$

$$\text{grad} U(M_0) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}(M_0), \frac{\partial U}{\partial y}(M_0), \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) \right).$$

градиент скалярного поля U в точке M_0 .

Разумеется, понятие градиента можно ввести и без использования системы координат:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = |\text{grad} U| \cdot |\bar{l}| \cdot \cos \phi = |\text{grad} U| \cdot \cos \phi,$$

т.к. $\bar{l}$ - единичный вектор.

Таким образом, $\left| \frac{\partial U}{\partial l} \right| \leq |\text{grad} U|$, причем равенство наступает при условии $|\cos \phi| = 1$.

Наибольшее значение $\frac{\partial U}{\partial l}$ по всем выборам $\bar{l}$, таким образом, есть модуль вектора градиента $|\text{grad}(U(M_0))|$, а направление вектора градиента – это как раз тот вектор $\bar{l}$, на котором это наибольшее значение достигается. Итак, направление и модуль вектора $\text{grad} U(M_0)$ определено без использования координат. Это говорит об инвариантности этого понятия относительно выбора системы координат и о наличии реальных естественно-научных интерпретаций.

Однако для вычисления градиента удобно его координатное представление. Из него, в частности, легко следуют свойства градиента.

$$1. \quad \text{grad}(u + v) = \text{grad} u + \text{grad} v$$

2. $\text{grad}(c \cdot u) = c \text{grad} u, \quad c = \text{const}$
3. $\text{grad}(u \cdot v) = u \text{grad} v + v \text{grad} u$
4. $\text{grad}(u/v) = \frac{v \text{grad} u - u \text{grad} v}{v^2}, \quad v \neq 0$
5. $\text{grad} f(u) = f'(u) \text{grad} u \quad (f - \text{дифференцируемая функция})$

Пример. Найдем $\text{grad} r$, где $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - модуль радиус-вектора $\vec{r}(x, y, z)$.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{и } \text{grad} r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{\vec{r}}{r}.$$

По формуле 5 из этого равенства следует: $\text{grad} f(r) = f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

Мы получили формулу для вычисления градиента радиальной функции $f(r)$.

Рассмотрим теперь поверхность уровня скалярного поля U , т.е. поверхность, задаваемую уравнением $U(x, y, z) = C$. Предположим, что U - непрерывно дифференцируемая функция от x, y, z . Тогда уравнение касательной плоскости в точке M_0 , лежащей на этой поверхности, имеет вид

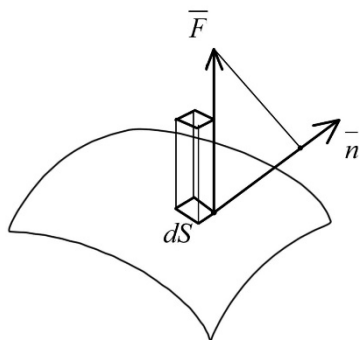
$$\frac{\partial U}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Координаты вектора градиента представляют собой коэффициенты этого уравнения. Поэтому $\text{grad} U(M_0)$ - нормаль к касательной плоскости в т. M_0 и, по определению нормали к поверхности, это - нормаль к самой поверхности уровня в этой точке.

§3. Поток вектора через поверхность. Дивергенция векторного поля. Векторная формулировка теоремы Остроградского-Гаусса

Пусть $\vec{F}$ - векторное поле, S - двусторонняя поверхность. Пусть выбрана сторона этой поверхности, т.е. зафиксировано направление нормали $\vec{n}$. Назовем $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$ -

поток вектора $\vec{F}$ через поверхность S в указанную сторону.



Этот термин связан со следующей гидродинамической задачей. Пусть $\vec{F}$ - вектор скорости течения жидкости в момент t . Посчитаем, сколько жидкости пройдет через малую часть поверхности dS за момент времени dt . Этот объем жидкости представляет собой цилиндр с основанием dS и высотой $\vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dt$, т.е. этот объем равен $\vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt$.

Тогда для всей поверхности получим $dt \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS$. Таким образом, поток представляет

собой скорость изменения количества протекающей через S жидкости в рассматриваемый момент времени.

Пусть векторное поле $\vec{F}$ задано в выбранной системе координат координатами

$\vec{F}(P, Q, R)$. Назовем **дивергенцией** $\vec{F}$ скалярное поле $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

(при условии, что эти частные производные существуют).

Легко доказать, что:

1. $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$
2. $\operatorname{div}(U \cdot \vec{a}) = U \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} U$.

Здесь U - скалярное поле и символ $\vec{a} \operatorname{grad} U$ обозначает скалярное произведение векторов.

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где $\vec{F} = (P, Q, R)$ - непрерывно дифференцируемое векторное поле, S - замкнутая поверхность, ограничивающая объем V и $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ - вектор внешней нормали.

Левая часть формулы имеет вид $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$, т.е. представляет собой поток $\vec{F}$ через внешнюю сторону S , а правую часть можно выразить следующим образом: $\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$. Итак, векторная формулировка теоремы Остроградского-Гаусса:

При сформулированных выше условиях $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$.

Понятие $\operatorname{div} \vec{F}$ можно определить независимым от координат способом. Для этого рассмотрим точку M_0 , окружим ее шаром радиуса ε и применим теорему Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{S_\varepsilon} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{V_\varepsilon} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz,$$

где V_ε - вышеупомянутый шар, а S_ε - внешняя сторона ограничивающей его сферы.

К правой части применим теорему о среднем (учитывая непрерывность $\operatorname{div} \vec{F}$):

$$\iiint_{V_\varepsilon} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \operatorname{div} \vec{F}(M_1) \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3,$$

где M_1 - близкая к M_0 точка. При $\varepsilon \rightarrow 0$, ввиду непрерывности дивергенции, $\operatorname{div} \vec{F}(M_1) \rightarrow \operatorname{div} \vec{F}(M_0)$ и мы можем определить дивергенцию равенством:

$$\operatorname{div} \vec{F}(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_\varepsilon} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS}{\frac{4}{3} \pi \varepsilon^3}, \text{ в правой части которого система координат не фигурирует.}$$

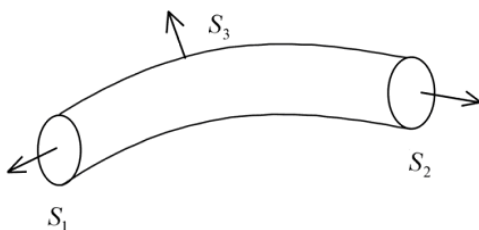
Если считать $\vec{F}$ вектором скорости жидкости, то $\operatorname{div} \vec{F}$ - это плотность источника.

§4. Соленоидальное поле

Определение. $\vec{F}$ - *соленоидальное поле*, если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.

Векторная линия обладает тем свойством, что в любой ее точке вектор касательной к линии совпадает с $\vec{F}$.

Векторная трубка - это совокупность векторных линий.



Пусть S_1, S_2 - сечения векторной трубки и S_3 - ее боковая поверхность. $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Рассмотрим внешнюю нормаль к S и применим теорему Остроградского: $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 0$, в случае соленоидального поля. Итак,

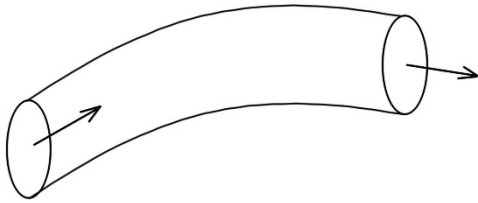
$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

На S_3 , по определению векторной линии, выполняется равенство $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$, поэтому

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0 \text{ или } -\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Изменяя направление нормали на S_1 на противоположное, получаем, что:

поток соленоидального поля через поперечные сечения векторных трубок постоянен.



§5. Циркуляция, ротор. Векторная формулировка теоремы Стокса

Пусть L - контур с заданным направлением обхода, $\vec{F}$ - векторное поле, $\vec{l}$ - единичный вектор касательной к кривой. Определим **циркуляцию** как интеграл $\oint_L (\vec{F} \cdot \vec{l}) dl$ (смысл - работа силы $\vec{F}$ вдоль контура L).

Введем систему координат. Пусть $(\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0)$ - направляющие косинусы $\vec{l}$, (P, Q, R) - координаты $\vec{F}$.

Тогда

$$(\vec{F} \cdot \vec{l}) dl = (P \cos \alpha_0 + Q \cos \beta_0 + R \cos \gamma_0) dl = P dx + Q dy + R dz = \vec{F} d\vec{r}$$

и циркуляция представляет собой интеграл $\oint_L P dx + Q dy + R dz$.

Для заданного непрерывно-дифференцируемого поля $\overline{F}(P, Q, R)$ определим **ротор** (или **вихрь**) этого поля:

$$\text{rot} \overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Легко проверить свойства ротора.

1. $\text{rot}(\overline{a} + \overline{b}) = \text{rot} \overline{a} + \text{rot} \overline{b}$
2. $\text{rot}(U \overline{a}) = U \text{rot} \overline{a} + \text{grad} U \times \overline{a}$, где $\text{grad} U \times \overline{a}$ обозначает векторное произведение этих векторов.

Вспомним теперь теорему Стокса:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

где P, Q, R - непрерывно дифференцируемые функции, S - кусочно-гладкая поверхность, L - ее край, причем направление обхода L относительно выбранной стороны S является положительным.

Вспомним, что $dy \wedge dz = \cos \alpha dS$, $dz \wedge dx = \cos \beta dS$, $dx \wedge dy = \cos \gamma dS$, где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы к выбранной стороне.

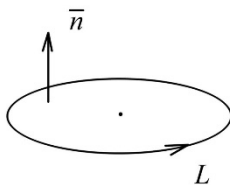
При этом правая часть формулы Стокса принимает вид

$$\iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS \text{ или } \iint_S (\text{rot} \overline{F} \cdot \overline{n}) dS.$$

Итак, в сделанных выше предположениях теорема Стокса выглядит так:

$$\oint_L \overline{F} d\overline{r} = \iint_S (\text{rot} \overline{F} \cdot \overline{n}) dS.$$

Дадим определение $\text{rot} \overline{F}$ без использования системы координат. Пусть M_0 - точка, S_ε - плоскость, в которой лежит окружность L_ε радиуса ε с центром в M_0 .



Тогда, по теореме о среднем, ввиду непрерывности подынтегральной функции

$$\iint_{(S_\varepsilon)} (\text{rot} \bar{F} \cdot \bar{n}) dS = \text{rot} \bar{F}(M_1) \cdot \bar{n}(M_1) \cdot \pi \varepsilon^2.$$

Здесь точка M_1 близка к M_0 . По теореме Стокса,

$$\oint_{L_\varepsilon} (\bar{F} \cdot \bar{l}) dl = (\text{rot} \bar{F}(M_1) \cdot \bar{n}(M_1)) \cdot \pi \varepsilon^2 \text{ или}$$

$$\text{rot} \bar{F}(M_0) \cdot \bar{n}(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_\varepsilon} (\bar{F} \cdot \bar{l}) dl}{\pi \varepsilon^2}.$$

Ввиду произвольности выбора плоскости, получаем проекцию $\text{rot} \bar{F}(M_0)$ на произвольную ось $\bar{n}(M_0)$. Это определяет и сам вектор.

Легко вычислить, что $\text{rot grad} U = \bar{0}$.

Можно доказать и обратное. Если область односвязная и векторное поле $\bar{F}$ удовлетворяет условию $\text{rot} \bar{F} = \bar{0}$, то $\bar{F}$ - потенциальное, т.е. существует функция U такая, что $\bar{F} = \text{grad} U$.

Отметим, что выводы о независимости интеграла от формы пути интегрирования, сделанные для двумерного случая, полностью переносятся и на трехмерный случай.

Полученное там условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ и условие $\text{rot} \bar{F} = \bar{0}$ т.е. равенства

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \text{ вполне аналогичны.}$$

Приложение 1.

Дифференциальные формы

Составители: Макаров Ю. Н., Лужина Л. М., Чирский В. Г.

Дифференциальными формами первой, второй и третьей степени, соответственно, от переменных x, y, z называются выражения:

$$1) \omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

$$2) \omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

$$3) \omega = f dx \wedge dy \wedge dz,$$

где P, Q, R, f – функции от переменных x, y, z ; dx, dy, dz – дифференциалы соответствующих переменных.

Операция внешнего произведения ($\wedge$) обладает следующими свойствами: если $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – произвольные дифференциальные формы, то:

$$1) (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3),$$

$$2) (\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3,$$

3) если, кроме того, ω_1 и ω_2 – формы первой степени, то $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$; в частности, если $\omega_1 = \omega_2$, то $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$.

Замена переменных в дифференциальных формах

1) Если $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ и $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ – дифференцируемые функции, то

$$\begin{aligned} \omega &= Pdx + Qdy + Rdz = \\ &= (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt. \end{aligned}$$

2) Если $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ и $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ – дифференцируемые функции, то

$$\begin{aligned} \omega &= P \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) + Q \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \\ &\quad + R \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \\ &= \left(P \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} + Q \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} + R \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right) du \wedge dv. \end{aligned}$$

3) Если $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$, а $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$, $z = z(u, v, t)$ – дифференцируемые функции, то

$$\begin{aligned}\omega &= f \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial t} dt \right) = \\ &= f \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} du \wedge dv \wedge dt.\end{aligned}$$

Внешние дифференциалы от формы

1) Если $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, то внешним дифференциалом формы ω называют выражение:

$$\begin{aligned}d\omega &:= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.\end{aligned}$$

В частности, если $R \equiv 0$ и $dz = 0$, то

$$d(Pdx + Qdy) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

2) Если $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, то

$$d\omega := dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Интегралы от дифференциальных форм

1) Пусть l – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, заданная уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогда, по определению, положим:

$$\int_l Pdx + Qdy + Rdz := \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt.$$

Обозначим:

$\bar{F} = (P, Q, R)$ – векторное поле;

$\bar{n}_1 = \pm \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}$ – касательный вектор к l . Выбор знака «+» или «-»

» определяет ориентацию кривой l ;

$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$ – дифференциал дуги кривой l ;

$dr = (dx, dy, dz)$.

Тогда мы можем кратко записать

$$\int_{l+} (\bar{F} \cdot d\bar{r}) := \int_{\alpha}^{\beta} (\bar{F} \cdot \bar{n}_1) dl.$$

Этот интеграл называют циркуляцией вектора $\bar{F}$ по ориентированной кривой l .

В частности, если $\bar{F} = \bar{n}_1$, то

$$\int_l (\bar{n} \cdot d\bar{r}) = \int_{\alpha}^{\beta} dl = |l|,$$

где $|l|$ – длина кривой l .

2) Пусть S – гладкая поверхность, задаваемая дифференцируемыми функциями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, где D – некоторая ограниченная замкнутая связная область.

Тогда, по определению,

$$\begin{aligned}
\int_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy &= \iint_D \left(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} + \right. \\
&+ Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} + \\
&\left. + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right) dudv.
\end{aligned}$$

Обозначим, как и выше,

$$\begin{aligned}
\bar{F} &= (P, Q, R); \\
\bar{r}_u &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \bar{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right); \\
\bar{n}_2 &= \pm \frac{(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}
\end{aligned}$$

– нормальный вектор поверхности S (выбор знака «+» или «-» определяет ориентацию поверхности); $ds = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| dx dy$ – дифференциал поверхности и $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

Тогда краткая запись интеграла от формы ω по поверхности S может быть представлена в виде:

$$\int_{S+} \omega = \iint_S (\bar{F} \cdot \bar{n}_2) ds.$$

Интеграл в правой части этого равенства называется потоком вектора $\bar{F}$ через заданную сторону поверхности S .

В частности, если $\bar{F} = \bar{n}_2$, то

$$\int_S \omega = \iint_S ds = \text{Пл. } S,$$

где $\text{Пл. } S$ – площадь поверхности S .

Замечание. Выбор вектора $\bar{n}_2$ или $(-\bar{n}_2)$ определяет ориентацию поверхности (или кривой $\pm n_1$). При изменении ориентации поверхности (или кривой) знак интеграла меняется на противоположный.

Общая формула Стокса

Будем называть кривую, поверхность или объем в $\mathbb{R}^3$ одним словом – поверхность – соответственно размерности 1, 2 или 3. Тогда граница ∂s поверхности размерности $k = 2, 3$ имеет размерность $(k - 1)$.

Теорема П1.1. Пусть S – гладкая ориентированная поверхность размерности k ($2 \leq k \leq 3$) и ∂s – гладкая граница S , ориентация которой согласована с ориентацией поверхности S ; ω – дифференциальная форма степени $(k - 1)$. Тогда имеет место формула

$$\int_{\partial s} \omega = \int_S d\omega.$$

Замечание. Эта теорема есть многомерное обобщение теоремы Стокса.

Следствие П.1.1. Теорема Грина.

$$\oint_{\partial s} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Следствие П.1.2. Теорема Стокса.

$$\oint_{\partial s} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Следствие П.1.3. Теорема Остроградского-Гаусса.

$$\oint_{\partial s} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

С доказательством общей формулы Стокса можно ознакомиться, например, в книге [3].

Список литературы.

1. Ефимов Н.В. Внешние дифференциальные формы в Евклидовом пространстве. Изд-во МГУ, 1971.
2. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1972.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. УРСС, 2001.

Приложение 2. Эйлеровы интегралы

1. Гамма-функция

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (1)$$

как функцию от s и выясним область ее определения. Для этого представим интеграл (1) в виде суммы несобственных интегралов

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = I_1(s) + I_2(s).$$

Поскольку $e^{-1} x^{s-1} \leq x^{s-1} e^{-x} \leq x^{s-1}$ для всех $x \in (0;1]$ и всех $s \in \mathbb{R}$, а эталонный интеграл $\int_0^1 x^{s-1} dx$ сходится при $s-1 > -1$; т.е. при $s > 0$, и расходится при $s \leq 0$, то, по признакам сравнения несобственных интегралов, интеграл $I_1(s)$ сходится при всех $s > 0$ и расходится при $s \leq 0$.

Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$ для любого $s \in \mathbb{R}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то по аналогичному признаку сравнения заключаем, что несобственный интеграл $I_2(s)$ сходится при всех $s \in \mathbb{R}$.

Окончательно, несобственный интеграл (1) сходится только при $s > 0$; т.е. **областью определения гамма-функции $\Gamma(s)$ служит множество всех положительных чисел.**

Интегрируя по частям (подстановка верхнего предела означает переход $x \rightarrow +\infty$),

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = -e^{-x} \cdot x^s \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + s \cdot \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = s \cdot \Gamma(s). \quad (2)$$

Формула $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$, $s > 0$, задает **функциональное уравнение для гамма-функции.**

Покажем, что при $s = n$, где n -натуральное число, $\Gamma(n) = (n-1)!$; т.е. **гамма-функция есть обобщение понятия факториала.** При $s = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t} + 1) = 1.$$

При $s = n$, где n -натуральное число большее 1, пользуемся функциональным уравнением

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots = (n-1)(n-2)\dots 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!.$$

Положив $0! = 1$, получим, что равенство $\Gamma(n) = (n-1)!$ выполняется для всех натуральных чисел.

Известно, что гамма-функция Эйлера бесконечно дифференцируема на $(0; +\infty)$, выпукла вниз и её минимум приходится в точке интервала $(1; 2)$, поскольку $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = \Gamma(1) = 1$.

2. Бета-функция

Эйлером предложен также несобственный интеграл

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (3)$$

как функция параметров $p, q \in \mathbb{R}$, которую называют **бета-функцией**. Представим интеграл (3) в виде суммы двух слагаемых

$$B(p, q) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = I_1(p, q) + I_2(p, q),$$

где $I_1(p, q)$ имеет особенность только в точке $x = 0$, а $I_2(p, q)$ - только в точке $x = 1$.

Поскольку для любого $q \in \mathbb{R}$ функция $(1-x)^{q-1}$ положительна, непрерывна и ограничена на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, то существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, что

$$C_1 x^{p-1} \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq C_2 x^{p-1} \text{ для всех } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \text{ и всех } p \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, как и в предыдущем пункте, убеждаемся, что интеграл $I_1(p, q)$ сходится для всех $q \in \mathbb{R}$ только при $p > 0$.

Аналогично, функция x^{p-1} положительна, непрерывна и ограничена на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ для любого $p \in \mathbb{R}$, и, следовательно, существуют $C_3, C_4 > 0$, что

$$C_3 (1-x)^{q-1} \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq C_4 (1-x)^{q-1} \text{ для всех } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \text{ и всех } q \in \mathbb{R}.$$

Поэтому несобственный интеграл $I_2(p, q)$ сходится для каждого $p \in \mathbb{R}$ только при $q > 0$.

Окончательно, бета-функция $B(p, q)$ определена только для $p > 0$ и $q > 0$.

Совершая в интеграле (3) замену переменной интегрирования

$x = 1 - t$, $dx = -dt$, получим

$$B(p, q) = - \int_1^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt = B(p, q). \quad (4)$$

Формула (4) указывает на свойство **симметричности бета-функции** Эйлера.

Интегрируя в (3) по частям и используя разложение $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$,

получим

$$\begin{aligned} B(p, q+1) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-t)^q dx = \frac{x^p}{p} (1-x)^q \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{q}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1} dx = \\ &= 0 + \frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx - \frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q dx = \frac{q}{p} B(p, q) - \frac{q}{p} B(p, q+1), \end{aligned}$$

откуда

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q), \quad p > 0, \quad q > 0. \quad (5)$$

В силу симметричности функции $B(p, q)$ имеем также

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q), \quad p > 0, \quad q > 0. \quad (5')$$

Формулы (5) и (5') называют **функциональными уравнениями для бета-функции**.

Если $q = n \in N$, то согласно (5)

$$\begin{aligned} B(p, n) &= \frac{n-1}{p+n-1} B(p, n-1) = \frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{n-2}{p+n-2} B(p, n-2) = \dots = \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\dots 1}{(p+n-1)(p+n-2)\dots(p+1)} B(p, 1). \end{aligned}$$

Но

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p} \Big|_0^1 = \frac{1}{p},$$

Так что

$$B(p, n) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)}, \quad p > 0, \quad n \in N. \quad (6)$$

Если $p = m \in N$, то (6) принимает вид

$$\begin{aligned} B(p, n) &= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-1)} = \frac{(n-1)! \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-1)}{1 \cdot 2 \dots (m-1) \cdot m \cdot (m+1) \dots (m+n-1)} = \\ &= \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \quad m, n \in N. \end{aligned}$$

Так как $(m-1)! = \Gamma(m)$, $(n-1)! = \Gamma(n)$ и $(m+n-1)! = \Gamma(m+n)$, то мы доказали частный случай

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m, n \in N,$$

замечательной **формулы Эйлера**

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

Гамма-функция и бета-функция, как и экспоненциальная функция, играют фундаментальную роль в математике и её приложениях.

Сформулируем без доказательств несколько важных свойств этих функций.

Для любого x , $0 < x < 1$ выполняется равенство $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, называемое

формулой дополнения. Из этого, в частности, следует, что

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \quad \text{при} \quad x = \frac{1}{2} \text{ и, следовательно, } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Бета-функция допускает ещё представление в виде интеграла

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy.$$

Часто используется интеграл (Вы встретите его при вычислении двойных, тройных интегралов при переходе к полярным, сферическим или цилиндрическим координатам)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} \varphi \cos^{n-1} \varphi \, d\varphi, \quad m, n > 0.$$

Сведём его к значениям эйлеровых интегралов:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} \varphi \cos^{n-1} \varphi \, d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi)^{m-1} (1 - \sin^2 \varphi)^{\frac{n-2}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = (\text{замена } x = \sin \varphi) = \\ &= \int_0^1 x^{m-1} (1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx = \quad (x^2 = y, \quad x = \sqrt{y}, \quad x^{m-1} = y^{\frac{m-1}{2}}, \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{m-1}{2}} (1-y)^{\frac{n-2}{2}} dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}. \end{aligned}$$

3. Формула Стирлинга

К настоящему моменту времени свойства гамма-функции изучены достаточно глубоко. В частности, для неё доказано следующее *асимптотическое представление*

$$\ln \Gamma(s) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{\theta}{12s}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (7)$$

называемое *формулой Стирлинга*. Для натуральных $s = n + 1$, когда $\Gamma(n + 1) = n!$, формула (7) после несложных преобразований принимает вид

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{где } |\omega| \leq 1.$$