

Билет 26: Правила Лопиталья

Приведённые ниже теоремы принадлежат, в основном, Лопиталю (Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital) и И.Бернулли (Joh. Bernoulli).

Неопределённость типа $\frac{0}{0}$

Теорема 26.1. Пусть: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $(a, b]$,

2) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$

3) в промежутке $(a, b]$ существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причём $g'(x) \neq 0$, и наконец,

4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

Тогда и

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

Доказательство. Дополним определение функций $f(x)$ и $g(x)$, положив их при $x = a$ равными нулю: $f(a) = g(a) = 0$. Тогда эти функции окажутся непрерывными во всём замкнутом промежутке $[a, b]$: их значения в точке a совпадают с пределами при $x \rightarrow a + 0$ [ввиду 2)], а в прочих точках непрерывность вытекает из существования конечных производных [см. 3)].

Применяя теорему Коши, получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

где $a < c < x$. То обстоятельство, что $g(x) \neq 0$, т. е. $g(x) \neq g(a)$, есть следствие предположения: $g'(x) \neq 0$, как это было установлено при выводе формулы Коши.

Когда $x \rightarrow a$, очевидно, и $c \rightarrow a$, так что, в силу 4),

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, доказанная теорема сводит предел отношения функций к пределу отношения производных, если последний существует. Часто оказывается, что нахождение предела отношения производных проще и может быть осуществлено элементарными приёмами.

Теорема 1 легко распространяется на случай, когда аргумент x стремится к бесконечному пределу: $a = \pm\infty$. Именно, имеет место, например.

Теорема 26.2. Пусть:

- 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[c, +\infty)$, где $c > 0$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, 3) существуют в промежутке $[c, +\infty)$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причём $g'(x) \neq 0$, и, наконец, 4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. Преобразуем переменную x по формуле $x = \frac{1}{t}$, $t = \frac{1}{x}$.

Тогда, если $x \rightarrow +\infty$, то $t \rightarrow 0$, и обратно. Ввиду 2), имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

а в силу 4),

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K.$$

К функциям $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$ от новой переменной t можно применить теорему 26.1, что даст нам

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K,$$

а тогда и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Неопределённость вида. $\frac{\infty}{\infty}$

Обратимся к рассмотрению неопределённых выражений вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. исследуем вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к $+\infty$ (при $x \rightarrow a + 0$).

В этом случае применимо то же правило Лопиталья: следующая теорема есть простая перефразировка теоремы 26.1.

Теорема 26.3 Пусть:

- 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $(a, b]$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = +\infty$,
- 3) существуют в промежутке $(a, b]$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причём $g'(x) \neq 0$, и, наконец,
- 4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Теорема 26.4 Пусть:

- 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[c, +\infty)$, где $c > 0$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$,
- 3) существуют в промежутке $[c, +\infty)$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причём $g'(x) \neq 0$,
- 4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Теоремы 26.3 и 26.4 даны БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. На экзамене следует знать их формулировки.

Правило Лопиталья позволяет доказать замечание, сделанное в конце 24 вопроса.

Теорема 26.5+24.2. Пусть в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существуют и непрерывны $f(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$.

Тогда

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n + o((\Delta x)^n) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Доказательство. Обозначим $T_n(x) = f'(x_0)\Delta x + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n$, $\Delta x = x - x_0$, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ и рассмотрим отношение $\alpha(x) = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$. По правилу Лопиталья (теореме 26.1), применённому $n - 1$ раз, имеем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{(x-x_0)^n}.$$

Из определения $T_n(x)$ следует, что $T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$.

Поэтому
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{((x-x_0)^n)^{(n-1)}} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - \right.$$
$$\left. f^{(n-1)}(x_0) \right) = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) \right) = 0.$$
 Это означает, что $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \alpha(x)(\Delta x)^n = o((\Delta x)^n), \Delta x \rightarrow 0$, что и требовалось доказать.