

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

**ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.  
СТЕПЕННЫЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ**

**(лекции для бакалавров)**

**Методическое пособие для подготовки к экзамену**

**Л.М.ЛУЖИНА**

**2026**

*В этой методической разработке содержится курс лекций доцента Л.М. Лужиной для бакалавров по теории числовых и функциональных (степенных и тригонометрических) рядов, приведены примеры решения задач, связанных с этими темами.*

## Глава 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

### 1.1. Понятие числового ряда

**Определение.** Если каждому  $n \in \mathbb{N}$  сопоставлено число  $a_n \in \mathbb{R}$ , то говорят, что задана **последовательность**  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Иными словами, последовательность представляет собой функцию натурального аргумента, иными словами, последовательность – это отображение множества натуральных чисел на множество действительных чисел:

$$1 \rightarrow f(1) = a_1 \in \mathbb{R}$$

$$2 \rightarrow f(2) = a_2 \in \mathbb{R}$$

$$3 \rightarrow f(3) = a_3 \in \mathbb{R}$$

...

$$n \rightarrow f(n) = a_n \in \mathbb{R}$$

...

Иногда вместо «последовательность» говорят «числовая последовательность». Имеется в виду, что далее будут рассматриваться «функциональные последовательности».

#### Примеры.

1. Последовательность  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ .

$$\text{В этом случае } f(n) = \frac{1}{n} = a_n.$$

Последовательность можно записать так:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots = f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

2. Последовательность  $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ .

$$\text{В этом случае } f(n) = (-1)^n = a_n.$$

Последовательность можно записать так:

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots &= f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots = \\ &= (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, \dots, (-1)^n, \dots = -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots \end{aligned}$$

3. Последовательность  $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ .

$$\text{В этом случае } f(n) = 2^n = a_n.$$

Последовательность можно записать так:

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots &= f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots = \\ &= 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots = 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots \end{aligned}$$

Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$  произвольная числовая последовательность. Складывая один за другим ее члены, получаем последовательность сумм

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Каждая из этих сумм, начиная со второй, получается из предыдущей прибавлением одного слагаемого – члена заданной последовательности  $\{a_n\}$ , имеющего тот же номер:  $S_n = S_{n-1} + a_n$  для всех  $n > 1$ . Поэтому процесс образования этих сумм можно представить в виде «бесконечно разворачивающейся суммы»  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ . Это не алгебраическая сумма (в алгебре определены лишь суммы конечного числа слагаемых), а запись процесса образования последовательности сумм  $\{S_n\}$ .

Формальное выражение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \tag{1}$$

порождаемое числовой последовательностью  $\{a_n\}$ , называют **числовым рядом**; числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  – его членами: первым, вторым, ...,  $a_n$  –  $n$ -ным или **общим членом ряда**;  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  – **частными (или частичными) суммами ряда**. Для ряда (1) используется также обозначение  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Иногда нумерацию членов ряда начинают не с 1, а с 0. Тогда соответствующий ряд обозначается  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . При изучении ряда (1) часто приходится рассматривать формальные выражения вида  $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$ , которые в дальнейшем будут называться остатками ряда. Остатки ряда сами являются числовыми рядами. Они обозначаются следующим образом:  $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = r_k$ .

Определим (пока тоже формально) сумму рядов и умножение ряда на число. Пусть даны ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . **Суммой** этих рядов назовем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ . **Произведением** ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  на число  $\lambda$  назовем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ .

## 1.2. Сходящиеся и расходящиеся ряды

**Определение 1.** Если последовательность  $\{S_n\}$  частных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится к некоторому числу  $S$ , то этот ряд называют сходящимся к сумме  $S$  и пишут  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  или  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

При этом допускается определенная вольность в обозначениях, состоящая в том, что одним и тем же символом  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  или  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  обозначаются как сам ряд, так и его сумма.

Не сходящиеся ряды называют *расходящимися*.

**Замечание.** Число  $S$  не следует называть «суммой всех членов ряда», так как существует класс рядов, сумма которых зависит от порядка нумерации «слагаемых». Заметим еще раз:  $S$  – это предел частных сумм ряда,  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , если этот предел существует и конечен.

Сформулируем важное для дальнейшего утверждение.

**Утверждение.** Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то для любого  $k$  сходится остаток ряда  $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ . Обратно, если хотя бы для одного значения  $k$  сходится остаток ряда  $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ , то сходится и сам ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Следствие.** Утверждение означает, что либо все остатки ряда сходятся, либо все они расходятся.

**Замечание.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится и имеет сумму  $S$ , то любая его *частная сумма  $S_n$  есть некоторое приближенное значение  $S$* , а соответствующий остаток ряда представляет собой погрешность вычисления.

Докажем необходимое условие сходимости числового ряда.

**Теорема 1.1.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Доказательство.

Пусть сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $S$  – его сумма. Так как при всех  $n > 1$  выполняется равенство  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и утверждалось (предел разности двух последовательностей равен разности пределов, так как эти пределы существуют и конечны).

Обратное утверждение не является верным: из того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  не следует, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

**Пример.**

Члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$  монотонно стремятся к нулю, так как  $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ . С другой стороны,  $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  и  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{2} - \sqrt{1} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$ , поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$ , что и означает, что рассматриваемый ряд расходится.

**Замечание.** В бесконечной сумме, вообще-то говоря, нельзя раскрывать скобки и менять слагаемые местами. Но  $S_n$  – конечная сумма, и в ней эти операции, конечно, разрешены, как в любой конечной сумме.

**Теорема 1.2.** Пусть сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  и их суммы равны  $S$  и  $T$ , соответственно. Тогда сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  и его сумма равна  $S + T$ . Кроме того, для любого числа  $c$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  сходится и его сумма равна  $cS$ .

Доказательство.

Пусть  $S_n, T_n$  – частные суммы, соответственно, рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Последовательности  $\{S_n\}$  и  $\{T_n\}$  по условию имеют пределы, которые равны суммам рядов  $S$  и  $T$ . Применяя теорему о пределе суммы последовательностей, получаем, что последовательность  $(S_n + T_n)$ , представляющая собой последовательность частных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ , имеет предел, равный  $S + T$ . Аналогично, последовательность  $(cS_n)$  частных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  имеет предел  $cS$ .

**Теорема 1.3.** Пусть сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Тогда ряд  $\sum_{N=1}^{\infty} b_N$ , члены которого образованы в результате последовательной группировки членов исходного ряда, то есть

$$b_N = a_{n_{N-1}+1} + \dots + a_{n_N}, N = 1, 2, \dots, 1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{N-1} < n_N < \dots$$

сходится и имеет ту же сумму.

**Теорема 1.4. (критерий Коши сходимости ряда).** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N(\varepsilon)$  такое, что для любого номера  $n > N(\varepsilon)$  и любого натурального  $p$  выполняется неравенство  $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$  или равносильное неравенство  $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ .

Доказательство.

Вспомним критерий Коши существования предела последовательности частных сумм  $\{S_n\}$ : предел этой последовательности существует тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N(\varepsilon)$  такое, что для любого номера  $n > N(\varepsilon)$  и любого натурального  $p$  выполняется неравенство  $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ .

### 1.3. Бесконечная геометрическая прогрессия

Таким термином принято называть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ,  $a, q \neq 0$ . Рассмотрим частные суммы

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

этого ряда, рассмотрим также величину

$$S_n q = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n$$

и разность этих двух величин

$$\begin{aligned} S_n - S_n q &= \\ &= (a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}) - (aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n) = a - aq^n. \end{aligned}$$

При  $q \neq 1$  получаем:  $S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$ .

При  $q = 1$ , очевидно,  $S_n = na$ .

Если  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$ ,

то есть ряд сходится к сумме  $S = \frac{a}{1-q}$ .

Если  $|q| \geq 1$ , то этот ряд расходится, поскольку не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

## Глава 2. СХОДИМОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

### 2.1. Критерий сходимости положительного ряда

**Определение.** Положительным рядом называют любой числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , все члены которого удовлетворяют условию  $a_n \geq 0$ .

**Замечание.** Если неравенство  $a_n \geq 0$  выполняется не для всех  $n$ , а только для  $n$ , начиная с некоторого номера  $n_0$ , то мы можем рассматривать не сам исходный ряд, а его остаток  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ .

Согласно утверждению из гл.1 ряд и любой его остаток либо одновременно являются сходящимися, либо одновременно являются расходящимися. Поэтому предположение о том, что неравенство  $a_n \geq 0$  выполняется для всех  $n$ , не ограничивает общности изложения.

**Теорема 2.1.** Положительный ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ограничена сверху.

Доказательство.

Из условия следует:

$$0 \leq S_n = a_1 + \dots + a_n \leq a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_{n+1}.$$

Таким образом,  $\{S_n\}$  – неубывающая последовательность. Если она ограничена сверху, то по теореме Вейерштрасса (напомним формулировку этой теоремы: всякая неубывающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел) существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  и число  $S$ , по определению, есть сумма рассматриваемого ряда. Обратно, если последовательность частных сумм имеет предел, то она ограничена, так как любая имеющая предел последовательность ограничена.

**Замечание.** В этой теореме условие *положительности* ряда является существенным. Например, последовательность частных сумм ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  ограничена, так как состоит из всего двух чисел: 0 и 1. Сам же этот ряд, как отмечено выше, расходится, поскольку не удовлетворяет необходимому признаку сходимости.

## 2.2. Сравнение положительных рядов

**Теорема 2.2 (первая теорема сравнения положительных рядов).** Пусть положительные ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  при всех  $n$  обладают свойством  $a_n \leq b_n$ . Тогда, если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то сходится также и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (значит, если расходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то расходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ). В случае сходимости рядов выполняется неравенство  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Доказательство.

Пусть  $S_n, T_n$  – частные суммы, соответственно, рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Из условия получаем очевидное неравенство  $S_n \leq T_n$ . Так как по условию ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то по теореме из гл.1 последовательность  $T_n$  ограничена сверху, то есть существует число  $T$  такое, что для всех  $n$  выполняется неравенство  $T_n \leq T^*$ . Но тогда для всех  $n$  выполняется и неравенство

$$S_n \leq T_n \leq T^*,$$

означающее, что последовательность  $S_n$  ограничена сверху. По той же теореме ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

**Замечание.** Напомним, что заключение теоремы о сходимости останется верным, если неравенства  $a_n \leq b_n$  выполняется не для всех  $n$ , а только для  $n$ , начиная с некоторого номера  $n_0$ . Однако неравенство  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует заменить неравенством  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ .

**Теорема 2.3 (вторая теорема сравнения положительных рядов).** Пусть положительные ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  при всех  $n$  обладают свойством  $a_n \geq 0$ ,  $b_n > 0$  и пусть существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$ . Тогда, либо оба ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство.

Условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$  запишем в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon.$$

Возьмем  $\varepsilon = \frac{k}{2}$ .

Для соответствующего  $n_0$  получаем:  $\forall n > n_0 \quad -\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} - k < \frac{k}{2}$ ,  $\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2}$ , что равносильно неравенствам  $n > n_0$ ,  $\frac{k}{2} b_n < a_n < \frac{3k}{2} b_n$ , поскольку  $b_n > 0$ .

Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , то, по второй теореме гл.1 сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3k}{2} b_n$  (мы положили  $c = \frac{3k}{2}$  в этой теореме). Но тогда по первой теореме сравнения сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , поскольку при всех  $n > n_0$  выполняются неравенства  $0 < a_n < \frac{3k}{2} b_n$ .

Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то по первой теореме сравнения сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2} b_n$ , поскольку при всех  $n > n_0$  выполняются неравенства  $0 < \frac{k}{2} b_n < a_n$ . По второй теореме гл.1 сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (мы положили  $c = \frac{2}{k}$  в этой теореме).

Выше доказано, что если сходится один из рассматриваемых рядов, то сходится и другой, то есть не может оказаться так, что один ряд сходится, а другой расходится. Это означает также, что если расходится один из этих рядов, то и другой расходится.

### 2.3. Признаки сходимости Коши и Даламбера положительных рядов

Теоремы сравнения позволяют доказать два простых и удобных признака сходимости положительных рядов, часто используемых на упражнениях по математическому анализу.

**Теорема 2.4 (признак сходимости Коши).** Пусть  $0 < q < 1$ . Если существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, если же существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

Доказательство.

Если существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ , то выполняются также неравенства  $0 \leq a_n \leq q^n$ . Так как геометрическая прогрессия  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  сходится при  $|q| < 1$ , то по первой теореме сравнения ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  также сходится. Если же существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , то  $a_n \geq 1$ . Поэтому равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  невозможно, необходимый признак сходимости не выполнен и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

Часто признак Коши формулируют в *предельной форме*:

Пусть для положительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда, если  $q < 1$ , то ряд сходится,

если  $q > 1$ , то ряд расходится,

при  $q = 1$  признак ответа не дает.

**Пример.**

Сходится ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ ?

Применим признак Коши в предельной форме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e}^{\frac{1}{n}(-n)} = e^{-1} < 1.$$

Ряд сходится.

**Теорема 2.5 (признак сходимости Даламбера).** Если существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  выполняются неравенства  $0 < a_{n+1} < qa_n$ , где  $0 < q < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. Если существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  выполняются неравенства  $a_{n+1} \geq a_n > 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

Доказательство.

В первом случае при  $n \geq n_0$  выполняются неравенства  $0 < a_{n_0+1} < qa_{n_0}$ ,  $0 < a_{n_0+2} < qa_{n_0+1}, \dots, 0 < a_{n-1} < qa_{n-2}, 0 < a_n < qa_{n-1}$ . Последовательно двигаясь справа налево, получаем следствие этих неравенств:

$$0 < a_n < qa_{n-1} < q^2 a_{n-2} < \dots < q^{n-n_0-1} a_{n_0+1} < q^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Значит, при  $n \geq n_0$  имеем:  $a_n < \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$ .

**Геометрическая прогрессия**  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  сходится при  $|q| < 1$ . Число  $\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$  представляет собой постоянную, не зависящую от  $n$  величину. Поэтому сходится также ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$ . Осталось применить первую теорему сравнения.

Если же существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  выполняются неравенства  $a_{n+1} \geq a_n > 0$ , то для любого  $n \geq n_0 + 1$  имеем:  $a_n \geq a_{n_0+1} > 0$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится по необходимому признаку сходимости.

В **предельной форме** признак Даламбера выглядит так:

Пусть существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $a_n > 0$  и пусть существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ .

Тогда,

если  $q < 1$ , то ряд сходится,

если  $q > 1$ , то ряд расходится,

при  $q = 1$  признак ответа не дает.

**Пример.**

Сходится ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ?

Применим признак Даламбера в предельной форме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд сходится.

### Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ МАКЛОРЕНА – КОШИ

Теория рядов во многом подобна теории несобственных интегралов. Действительно, несобственный интеграл  $\int_a^\infty f(x)dx$  определяется как предел  $\lim_{B \rightarrow \infty} F(B) = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x)dx$ . Ряд  $\sum_{k=1}^\infty a_k$  также определяется с помощью предельного перехода как  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ .

Как доказано выше, положительный ряд  $\sum_{k=1}^\infty a_k$  сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , ограничена сверху, то есть существует постоянная  $C$  такая, что для любого  $n = 1, 2, 3, \dots$  выполняется неравенство  $S_n \leq C$ . Напомним, что если  $f(x) \geq 0$ , то несобственный интеграл  $\int_a^\infty f(x)dx$  сходится тогда и только тогда, когда существует некоторая постоянная  $D$ , такая, что для любого  $B \geq a$  выполняется неравенство  $\int_a^B f(x)dx \leq D$ .

Схожесть понятий ряда и несобственного интеграла особенно отчетливо видна в следующей теореме.

**Теорема 3.1 (интегральный признак сходимости Маклорена – Коши).** Пусть  $f(x)$ , определенная при  $x \geq 1$ , неотрицательная невозрастающая функция. Тогда ряд  $\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty f(k)$  и несобственный интеграл  $\int_1^\infty f(x)dx$  либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство.

Так как функция  $f(x)$  невозрастающая, она является интегрируемой на отрезке  $[1, B]$  для любого  $B \geq 1$  (вспомним теорему: монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке). Кроме того, для любого натурального числа  $n$  на отрезке  $[n, n+1]$  выполняются неравенства

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n).$$

Как отмечалось выше, эти неравенства можно почленно интегрировать на отрезке  $[n, n+1]$  (вспомним свойство интеграла: если  $a < b$  и интегрируемые функции  $f(x), g(x)$  удовлетворяют неравенству  $f(x) \leq g(x)$ , то и  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ ) и поэтому

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx.$$

Поскольку  $f(n+1)$ ,  $f(n)$  – не зависящие от  $x$  величины, то есть постоянные, то имеют место равенства

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx = f(n+1) \int_n^{n+1} dx = f(n+1),$$

$$\int_n^{n+1} f(n)dx = f(n) \int_n^{n+1} dx = f(n).$$

$$\text{Следовательно, } f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n).$$

Пусть, далее,  $N \geq 2$ ,  $N$  – натуральное число. Просуммируем эти неравенства по  $n$ , начиная от  $n = 1$  до  $n = N - 1$  и получим неравенства

$$f(2) + f(3) + \dots + f(N) \leq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{N-1}^N f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(N-1).$$

Сумма интегралов по свойству аддитивности интеграла равна  $\int_1^N f(x)dx$ . В левой и правой частях этих неравенств стоят, соответственно,  $S_N - f(1)$  и  $S_{N-1}$ .

Таким образом, для любого натурального числа  $N \geq 2$  получаем

$$S_N - f(1) \leq \int_1^N f(x)dx \leq S_{N-1},$$

откуда следует, что  $S_N \leq f(1) + \int_1^N f(x)dx$ .

Предположим, что сходится интеграл  $\int_1^\infty f(x)dx$ . Так как функция  $f(x) \geq 0$  по условию, то критерий существования несобственного интеграла, сформулированный выше, показывает, что существует некоторая постоянная  $D$ , такая, что для любого  $B \geq 1$  выполняется неравенство  $\int_1^B f(x)dx \leq D$ . Значит, для любого  $N$  выполняется неравенство  $S_N \leq C = f(1) + D$  и критерий сходимости ряда  $\sum_{k=1}^\infty a_k$  выполнен. Отметим также, что, переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$  в неравенстве  $S_N \leq f(1) + \int_1^N f(x)dx$ , мы получаем, что сумма ряда не превосходит величины  $f(1) + \int_1^\infty f(x)dx$ .

Обратно, если сходится ряд  $\sum_{k=1}^\infty a_k$ , то существует некоторая постоянная  $C$ , такая, что для любого  $N$  выполняется неравенство  $S_N \leq C$ .

Для произвольного  $B \geq 1$  выберем натуральное число  $N$  так, чтобы выполнялись неравенства  $N \leq B \leq N + 1$ . Так как  $f(x) \geq 0$ , справедливы неравенства  $\int_1^N f(x)dx \leq \int_1^B f(x)dx \leq \int_1^{N+1} f(x)dx$ . По доказанному выше,  $\int_1^N f(x)dx \leq S_{N-1}$  для любого натурального  $N$ , поэтому оно остается

справедливым, если заменить в нем число  $N$  числом  $N + 1$ , то есть  $\int_1^{N+1} f(x)dx \leq S_N$ . Таким образом, для произвольного  $B \geq 1$  имеем

$$\int_1^B f(x)dx \leq \int_1^{N+1} f(x)dx \leq S_N \leq C,$$

откуда следует сходимость несобственного интеграла  $\int_1^\infty f(x)dx$ .

Доказанная теорема имеет простую геометрическую интерпретацию.

График функции  $y = f(x)$  заключен между двумя графиками ступенчатых функций. Площадь каждой ступеньки «верхней» функции на отрезке  $[n, n + 1]$  равна  $f(n)$ , а площадь каждой ступеньки «нижней» функции равна  $f(n + 1)$ . Поэтому неравенства  $S_N - f(1) \leq \int_1^N f(x)dx \leq S_{N-1}$  имеют простой геометрический смысл неравенств между соответствующими площадями.

Доказанная теорема имеет ряд важных следствий. Приведем одно из них.

**Следствие.** Ряд  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

**Доказательство.**

В этом случае  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ . Рассмотрим несобственный интеграл  $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ . Про него известно, что он сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ . Осталось применить теорему.

**Замечание.** Величина  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$  зависит от  $p$  и при  $p > 1$  может рассматриваться, как функция от  $p$ . Это – одна из наиболее важных в математике функций, носящая название «дзета-функция Римана» и обозначаемая  $\zeta(p)$ .

## Глава 4. РЯДЫ С ЧЛЕНАМИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗНАКОВ

### 4.1. Абсолютная сходимость

Перейдём к рассмотрению общего случая, когда члены ряда  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  имеют произвольные знаки и введём два новых ряда  $\sum_{n=1}^\infty a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^\infty a_n^-$ . Члены этих рядов определяются равенствами

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Имеют место равенства

$$a_n = a_n^+ + a_n^-, |a_n| = a_n^+ - a_n^-, \quad (1)$$

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}. \quad (2)$$

**Определение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

Таким образом, сходящиеся положительные ряды, рассмотренные в предыдущем параграфе, сходятся абсолютно.

**Утверждение.** Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство.

Применим к сходящемуся ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  критерий Коши сходимости ряда. Получаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N(\varepsilon)$  такое, что для любого номера  $n > N(\varepsilon)$  и любого натурального  $p$  выполняется неравенство  $||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|| < \varepsilon$ .

По свойству модуля  $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ , поэтому для исходного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  также выполняется критерий Коши, и он сходится.

**Теорема 4.1.** Абсолютная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  равносильна одновременной сходимости рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ . Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, но не абсолютно, то оба ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  расходятся.

Доказательство.

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится, то по утверждению сходится также сам ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Тогда из равенств

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

и теоремы 2 пункта 1.2 следует, что сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ .

Обратно, пусть сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ . Тогда из равенств  $a_n = a_n^+ + a_n^-$ ,  $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$  и теоремы 2 пункта 1.2 следует, что сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

Если же ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится, то из равенств  $a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}$ ,  $a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$  следует, что оба ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  расходятся, как полусуммы сходящегося и расходящегося ряда.

Теорема доказана.

Значение этой теоремы состоит в том, что она сводит вопрос об абсолютной сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , члены которого имеют произвольные знаки к сходимости рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ , члены которых имеют постоянные знаки.

Важным свойством абсолютно сходящегося ряда является его *безусловная* сходимость. Дадим определение этого понятия. Если переставить члены исходного ряда, то есть поменять их нумерацию, не добавляя новых членов и не отбрасывая старых, то получится некоторый новый ряд. На первый взгляд, по аналогии с переместительным законом сложения, полученный в результате перестановки ряд должен сходиться и иметь ту же сумму, что и исходный ряд. Но вскоре мы увидим, что это не всегда так! И переместительный закон, доказанный для конечных сумм, не обязательно выполняется для бесконечных рядов.

Свойство сходящегося ряда оставаться сходящимся и не менять суммы при любой перестановке его членов называется *безусловной сходимостью* ряда.

**Теорема 4.2 (Теорема Дирихле о безусловной сходимости).** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно, то он сходится безусловно.

Доказательство.

Сначала рассмотрим положительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и произведём произвольную перестановку его членов. В результате получится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , для любого члена  $b_n$  которого существует такой номер  $k_n$ , что  $b_n = a_{k_n}$ . Частная сумма  $S_N^* = b_1 + \dots + b_N$  равна  $a_{k_1} + \dots + a_{k_N}$ . Среди конечного множества чисел  $k_1, \dots, k_N$  выберем наибольшее и обозначим его  $M$ . Так как члены ряда неотрицательны по условию, выполняются неравенства

$$S_N^* = b_1 + \dots + b_N = a_{k_1} + \dots + a_{k_N} \leq a_1 + \dots + a_M = S_M.$$

Таким образом, для любого  $N$  существует такое  $M$ , что  $S_N^* \leq S$ . Так как положительный ряд сходится, его частные суммы ограничены сверху суммой ряда  $S$ . Следовательно, частные суммы  $S_N^*$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ограничены сверху этим же числом  $S$ . Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится. Кроме того, так как для любого  $N$  выполнено неравенство  $S_N^* \leq S$ , сумма  $S^*$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  удовлетворяет неравенству  $S^* \leq S$ , то есть при перестановке членов ряда его сумма не возрастает. Для доказательства обратного неравенства  $S^* \geq S$  просто рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  как исходный, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — как полученный из него

обратной перестановкой. Таким образом, мы получили неравенства  $S^* \leq S$  и  $S^* \geq S$ , из которых следует, что  $S^* = S$ .

Теперь рассмотрим общий случай, когда знаки членов ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  произвольны. Рассмотрим тогда соответствующие ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ . По определению, числа  $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$ ,  $a_n^- = \min\{a_n, 0\}$  имеют постоянные знаки, из теоремы 1 следует, что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  сходятся. Согласно равенствам (1),  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ , поэтому перестановка членов ряда приводит к перестановкам членов рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ . Но к этим рядам можно применить доказанную первую часть теоремы, согласно которой перестановки не меняют их сумм. Значит, не изменится и сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Теорема доказана.

## Глава 5. УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

### 5.1 Теорема Римана

В предыдущем параграфе было установлено, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится и безусловно. Однако если ряд сходится не абсолютно, то перестановка членов ряда может изменить его сумму и даже нарушить сходимость ряда. Эти удивительные факты нашли свое отражение в следующей теореме.

**Теорема Римана.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится не абсолютно, то для любого заданного числа  $A$  (так же, как и для  $\pm\infty$ ), существует такая перестановка членов этого ряда, в результате которой получится ряд, сумма которого равна  $A$ .

### 5.2. Теорема Лейбница

Важным примером рядов, сходимость которых может быть неабсолютной, являются знакочередующиеся ряды, то есть ряды вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n, \quad c_n \geq 0.$$

**Теорема Лейбница.** Пусть члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ ,  $c_n \geq 0$  удовлетворяют условиям

- 1)  $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots \geq c_n \geq \dots$   
(иными словами,  $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$  для всех  $n$ );

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ ,  $c_n \geq 0$  сходится, и его сумма  $S$  удовлетворяет неравенствам  $0 \leq S \leq c_1$ .

Доказательство.

Рассмотрим частные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$  с четными номерами. Они удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2n-3} - c_{2n-2} + c_{2n-1} - c_{2n} = \\ &= S_{2n-2} + c_{2n-1} - c_{2n} \geq S_{2n-2}. \end{aligned}$$

Кроме того, также выполняется, что

$$S_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n} \leq c_1.$$

Последовательность  $S_{2n}$  является возрастающей и ограниченной сверху, поэтому она имеет предел по теореме Вейерштрасса. Обозначим его  $S$ . Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N_1(\varepsilon)$ , что для всех номеров  $2n$  таких, что  $2n > N_1(\varepsilon)$  имеет место неравенство

$$|S_{2n} - S| < \varepsilon.$$

Кроме того, по доказанному, для любого  $n$  выполняются неравенства  $0 \leq S_{2n} \leq c_1$ . По теореме о предельном переходе в неравенствах имеем  $0 \leq S \leq c_1$ .

Частная сумма с нечетным номером имеет вид:  $S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1}$ . Поэтому получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + c_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N_2(\varepsilon)$ , что для всех номеров  $2n + 1$  таких, что  $2n + 1 > N_2(\varepsilon)$  имеет место неравенство

$$|S_{2n+1} - S| < \varepsilon.$$

Положим, для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ . Тогда, если  $N > N(\varepsilon)$ , то, ввиду полученных выше неравенств, как в случае  $N = 2n$ , так и в случае  $N = 2n+1$  получаем:  $|S_N - S| < \varepsilon$ . Следовательно,  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ .

Теорема доказана.

### Пример.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  сходится, так как  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Позже будет доказано, что сумма этого ряда равна  $\ln 2$ .

**Замечание:** Остаток  $r_{N-1}$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ ,  $c_n \geq 0$  имеет вид  $\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ ,  $c_n \geq 0$ . Если  $N$  – четное число, то выполняются неравенства  $-c_N \leq r_{N-1} \leq 0$ , а если  $N$  – нечетное число, то выполняются неравенства  $c_N \geq r_{N-1} \geq 0$ .

Это замечание будет использовано при оценке точности приближенных вычислений, использующих ряды.

Сформулируем две полезные теоремы.

**Теорема Дирихле.** Пусть

- 1) частные суммы  $S_n$  ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  образуют ограниченную последовательность;
- 2)  $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

**Замечание.** Теорема Лейбница является следствием теоремы Дирихле, в котором  $a_n = (-1)^{n-1}$ ,  $b_n = c_n$ . Суммы  $S_n$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$  принимают всего два значения: 0 и 1.

**Теорема Абеля.** Пусть

- 1) ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходится;
- 2)  $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ ;
- 3)  $(b_n)$  – ограниченная последовательность.

Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

## Глава 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

### 6.1. Поточечная сходимость функциональной последовательности и ряда

Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность функций, определенных на множестве  $X \subset \mathbb{R}$  и пусть эта последовательность имеет предел при любом  $x \in X$ . В этом случае можно определить предельную функцию

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in X$$

и говорить, что последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к функции  $f(x)$  на множестве  $X$  (иногда добавляя слово **поточечно**).

Аналогично, если все члены ряда  $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — определены на множестве  $X \subset \mathbb{R}$  и этот ряд сходится при любом  $x \in X$ , то полагаем  $f(x)$  равной пределу частных сумм этого ряда:  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ ,  $x \in X$ . Обозначаем также  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ; эта функция называется суммой ряда.

Одна из главных проблем в связи с этими определениями такова: сохраняются ли важнейшие свойства функций  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , такие, как непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость у предельной функции  $f(x)$ ? Та же проблема важна и для суммы ряда.

Оказывается, эти свойства не всегда сохраняются. Рассмотрим примеры.

#### Пример 1.

Пусть  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ . Найдём предельную функцию  $f(x)$ . Если  $x \in [0, 1)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ , а если  $x = 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ , таким образом предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

оказалась разрывной.

#### Пример 2.

$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Очевидно, что для любого  $x$  имеем:

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = 0$ . Следовательно, для любого  $x$  производная  $f'(x) = 0$ . Однако  $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$  и  $f'_n(0) = \sqrt{n} \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому последовательность производных  $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  не может иметь пределом  $f'(x)$ .

### Пример 3.

Пусть  $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Для любого  $x \in (0, 1]$  величина  $q = 1 - x^2$  удовлетворяет неравенствам  $0 \leq q < 1$ , поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nxq^n = 0$ . Кроме того,  $f_n(0) = 0$  и, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, x \in [0, 1]$ .

Значит,  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$ .

Но  $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx(1 - x^2)^n dx = -\frac{n}{2} \int_0^1 (1 - x^2)^n d(1 - x^2) = \frac{n}{2n+2}$ .

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

## 6.2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Примеры, приведенные в предыдущем пункте, показали, что при описанном в этом пункте поточечном предельном переходе могут не сохраниться основные свойства функций, входящих в последовательность. Определим более сильное понятие – равномерную сходимость.

**Определение.** Будем говорить, что последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , определённых на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , равномерно сходится на этом множестве к предельной функции  $f(x)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N(\varepsilon)$ , что при любом  $n > N(\varepsilon)$  для всех  $x \in X$  выполняется неравенство:  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Для равномерной сходимости часто используется обозначение

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } X.$$

Укажем на отличие определения равномерной сходимости от определения поточечной сходимости. Определение поточечной сходимости таково: для всех  $x \in X$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N(\varepsilon, x)$ , что при  $n > N(\varepsilon, x)$  выполняется неравенство  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Определение равномерной сходимости содержит значительно более сильное требование, состоящее в том, что существует число  $N(\varepsilon)$ , пригодное в качестве  $N(\varepsilon, x)$  для всех  $x \in X$ .

Ряд  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  называется **равномерно сходящимся** на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , если последовательность его частных сумм **равномерно сходится** на этом множестве.

Следующая теорема представляет собой критерий Коши равномерной сходимости.

**Теорема 6.1.** Последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , определённых на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , равномерно сходится на этом множестве тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N(\varepsilon)$ , что для всех  $x \in X$  при  $\forall n > N(\varepsilon), \forall m > N(\varepsilon)$  выполняется неравенство:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Переформулируем этот критерий на случай рядов.

**Теорема 6.2.** Ряд  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  равномерно сходится на множестве  $X \subset \mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N(\varepsilon)$ , что для всех  $x \in X$  при  $\forall n > N(\varepsilon), \forall p > 0, p \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство:  $|a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon$ .

Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частных сумм ряда.

**Следствие (необходимый признак равномерной сходимости ряда).** Если ряд  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  равномерно сходится на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , то последовательность  $a_n(x)$  равномерно стремится к 0 на множестве  $X$ .

Доказательство.

Положим в предыдущей теореме  $p = 1$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N(\varepsilon)$ , что при  $n > N(\varepsilon)$ , для всех  $x \in X$  выполняется неравенство:  $|a_{n+1}(x)| < \varepsilon$ . Это означает, что последовательность  $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно стремится к 0 на множестве  $X$ .

Непосредственно из определения равномерной сходимости вытекает простой, но часто полезный критерий.

**Теорема 6.4 (Вейерштрасса о мажорантной сходимости).** Пусть последовательность функций  $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  определена на множестве  $X \subset \mathbb{R}$  и пусть для всех  $n$  и для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $|a_n(x)| \leq c_n$ . Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  сходится, то ряд  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  равномерно сходится на множестве  $X$ . Кроме того, этот ряд сходится абсолютно для всех  $x \in X$ .

Доказательство.

Абсолютная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  следует из первой теоремы сравнения положительных рядов.

Далее, сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  означает выполнение критерия Коши. Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N(\varepsilon)$ , что при  $n > N(\varepsilon)$  и любом  $p > 0, p \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство  $|c_{n+1} + \dots + c_{n+p}| < \varepsilon$ . Из условия теоремы сразу следует, что все числа  $c_n \geq 0$  и предыдущее неравенство можно переписать в виде  $c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon$ . Снова используем условие теоремы и получим, что для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $|a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon$ . Это означает, что для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  выполнен критерий Коши равномерной сходимости.

Приведем **пример** использования этой теоремы.

Рассмотрим геометрическую прогрессию  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Докажем, что этот ряд равномерно сходится на любом множестве  $[-q, q], 0 < q < 1$ . Действительно, на этом множестве выполняются неравенства  $|x^n| \leq q^n$  и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  сходится. По теореме Вейерштрасса он сходится равномерно. Напомним, что выше мы установили, что на всем интервале  $(-1, 1)$  геометрическая прогрессия сходится неравномерно!

**Замечание.** Абсолютная сходимость и равномерная сходимость – независимые понятия. Например, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$  равномерно сходится на множестве  $x \geq 0$ , так как, по теореме Лейбница, абсолютная величина его остатка не превосходит  $\frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ . Значит, остаток ряда равномерно стремится к 0, что и означает равномерную сходимость ряда. Однако ряд из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$  расходится. Действительно, сравним этот ряд с расходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x+n} \cdot \frac{n}{1} \right) = 1$ , то можно применить вторую теорему сравнения.

Наконец, уже многократно упоминавшаяся геометрическая прогрессия на интервале  $(-1, 1)$  сходится абсолютно, но неравномерно.

## Глава 7. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

**Теорема 7.1.** Пусть последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , определённых на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , равномерно сходится на этом множестве к предельной функции  $f(x)$ . Пусть  $a$  — предельная точка множества  $X$  и пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = A_n$ . Тогда последовательность  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится, причём  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ , иными словами,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Доказательство.

По критерию Коши для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N(\varepsilon)$ , что при  $n > N(\varepsilon)$ ,  $m > N(\varepsilon)$  для всех  $x \in X$  выполняется неравенство:  $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Перейдём в этом неравенстве к пределу при  $x \rightarrow a$  и получим неравенство  $|A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , означающее, что для последовательности  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  выполняется критерий Коши. Поэтому существует предел этой последовательности, который будет обозначен  $A$ .

Теперь,  $|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$ .

Сначала выберем  $n$  так, чтобы для всех  $x \in X$  выполнялось неравенство:  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  и чтобы  $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Такой выбор возможен, так как последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно сходится на этом множестве к предельной функции  $f(x)$  и так как  $A$  — предел последовательности  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Затем подберём такую окрестность  $U(a)$  точки  $a$ , что для всех  $x \in U(a)$  выполняется неравенство  $|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Следовательно, для всех  $x \in U(a)$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ,

означающее, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

**Следствие 1.** Если последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , непрерывных на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , равномерно сходится на этом множестве к предельной функции  $f(x)$ , то  $f(x)$  непрерывна на множестве  $X$ .

**Следствие 2.** Пусть функции  $a_n(x)$  непрерывны на множестве  $X \subset \mathbb{R}$  и пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно на этом множестве. Тогда сумма  $f(x)$  этого ряда непрерывна на множестве  $X$ .

Достаточно применить предыдущее следствие к последовательности частных сумм ряда.

## 7.1. Равномерная сходимость и интегрирование

**Теорема 7.2.** Пусть последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , равномерно сходится на этом отрезке к предельной функции  $f(x)$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .

Доказательство.

Так как функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то интегралы в обеих частях доказываемого равенства существуют. Рассмотрим функцию  $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$ . Для доказательства теоремы достаточно показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b r_n(x) dx = 0$ . Ввиду равномерной сходимости, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N(\varepsilon)$ , что при  $n > N(\varepsilon)$  для всех  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство:  $|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$ . Но тогда при  $n > N(\varepsilon)$  имеем:

$$\left| \int_a^b r_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |r_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b r_n(x) dx = 0$  доказано.

**Следствие.** Пусть функции  $a_n(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно на этом отрезке. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) dx$$

Достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частных сумм ряда.

**Замечание.** Доказанные теорема и следствие останутся верными и при более слабых условиях интегрируемости всех функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  (соответственно,  $a_n(x)$ ) на отрезке  $[a, b]$ .

## 7.2. Равномерная сходимость и дифференцирование

**Теорема. 7.3.** Пусть все функции  $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ . Пусть последовательность  $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно сходится на  $[a, b]$  и пусть последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится хотя бы в одной точке  $x_0 \in [a, b]$ . Тогда  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно сходится на  $[a, b]$  к функции  $f(x)$  и в любой точке  $x \in [a, b]$  выполняется равенство  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

**Следствие.** Пусть функции  $a'_n(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$  сходится равномерно на этом отрезке. Пусть хотя бы в одной точке  $x_0 \in [a, b]$  сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно на этом отрезке и для любой точки  $x$  из отрезка  $[a, b]$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x).$$

## Глава 8. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

### 8.1. Радиус сходимости степенного ряда

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

где  $a_n$  — числа, называемые коэффициентами ряда. Так как замена переменной  $x = z - z_0$  сразу приводит к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

имеющему несколько более простой вид, дальнейшие исследования будем проводить именно для рядов такого вида.

Прежде всего выясним вопрос о сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Очевидно, что если  $x = 0$ , то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится, какими бы ни были его коэффициенты.

**Теорема 8.1.** Если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится, хотя бы неабсолютно, в точке  $x = a, a \neq 0$ , то он сходится и в любой точке  $x$ , удовлетворяющей неравенству  $|x| < |a|$ , причём сходится в этой точке абсолютно.

Доказательство.

Представим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  в виде  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n \left(\frac{x}{a}\right)^n$ . Так как ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n$  сходится, его общий член  $a_n a^n$  стремится к нулю, поэтому,

начиная с некоторого  $n_0$ , выполняются неравенства  $|a_n a^n| \leq 1$ . Поскольку  $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$ , сравнение с геометрической прогрессией  $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{a}\right|^n$  показывает, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  сходится.

Геометрически эта теорема означает, что областью сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  является промежуток числовой оси, середина которого совпадает с точкой  $x = 0$ .

Возможны следующие 2 случая. В первом из них множество абсолютных величин  $|a|$  точек  $x = a$ , в которых сходится рассматриваемый ряд, ограничено сверху. Тогда существует точная верхняя грань этого множества. Эта величина называется **радиусом сходимости** степенного ряда и обозначается  $R$ . Из определения следует, что если  $|x| < R$ , то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  абсолютно сходится, а если  $|x| > R$ , то этот ряд расходится.

Во втором случае множество абсолютных величин  $|a|$  точек  $x = a$ , в которых сходится рассматриваемый ряд, не ограничено сверху. Тогда это означает, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  абсолютно сходится на всей числовой прямой. В этом случае полагаем  $R = \infty$ .

Для нахождения радиуса сходимости можно воспользоваться одной из следующих формул.

### Теорема 8.2.

1. Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , то  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$   
(в случае, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ , считаем  $R = \infty$ , а если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ , то  $R = 0$ ).
2. Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , то  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$   
(в случае, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ , считаем  $R = \infty$ , а если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ , то  $R = 0$ ).

Доказательство.

Применим к ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  признак сходимости Коши. По условию, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$ . Признак Коши даёт следующие утверждения: если величина

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$$

меньше 1, то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  сходится, если больше 1, то этот ряд расходится.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = 0 \cdot |x| = 0 < 1$  для любого  $x$ , по-

этому ряд всюду сходится и  $R = \infty$ . Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$ , то при

$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  выполняется неравенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < 1$  и ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  сходится, а при  $|x| > \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  выполняется неравенство

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| > 1$  и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  расходится. Как отмечалось выше, это

означает, что  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ .

Вторую формулу получим, если применим к ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  признак схо-

димости Даламбера. Предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|$  существует по

условию. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = 0 \cdot |x| = 0 < 1$  для любого

$x$ , поэтому ряд всюду сходится и  $R = \infty$ . Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 0$ , то при

$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$  выполняется неравенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| < 1$  и ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  сходится, а при  $|x| > \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$  выполняется неравенство

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| > 1$  и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  расходится. Как отмечалось выше, это

означает, что  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$ .

## Примеры.

1) Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  сходится на всей числовой прямой. Для него  $R = \infty$ .

Действительно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ .

2) Радиус сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$  равен 1, так как для любого  $p$  выпол-

няется, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$ .

3) Наконец, ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  сходится только при  $x = 0$ , то есть  $R = 0$ , так

как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$ .

Интервал  $(-R, R)$  называется интервалом сходимости степенного ряда.

Как доказано выше, во всех точках этого интервала степенной ряд абсолютно сходится. Что касается концевых точек  $x = \pm R$ , то ряд может в них как сходиться, так и расходиться. Приведём соответствующие примеры, в каждом из которых  $R = 1$ .

### Примеры.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ , сумма геометрической прогрессии, расходится в точках  $x = \pm 1$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  расходится при  $x = 1$ , так как совпадает в этой точке с гармоническим рядом. Однако при  $x = -1$  этот ряд сходится по теореме Лейбница (ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  — знакочередующийся с монотонно стремящимися к нулю модулями его членов).

Наконец, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  абсолютно сходится в точках  $x = \pm 1$  по теореме сравнения (сравниваем с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , который сходится).

## 8.2. Непрерывность степенного ряда

**Теорема 8.3.** Степенной ряд представляет собой непрерывную функцию на всём интервале сходимости.

**Лемма.** Пусть  $0 < q < R$ . Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится на  $[-q, q]$  абсолютно и равномерно.

Доказательство.

При  $x = q$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$  сходится абсолютно, то есть сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| q^n$ . Так как для любого  $x \in [-q, q]$  имеем:  $|a_n x^n| \leq |a_n| q^n$ , из теоремы Вейерштрасса следуют как абсолютная, так и равномерная сходимость ряда на  $[-q, q]$  (впрочем, абсолютная сходимость на всём интервале  $(-R, R)$  была установлена в п.8.1).

**Замечание.** Доказанная лемма не утверждает равномерной сходимости степенного ряда на его интервале сходимости. Более того, в ряде случаев равномерной сходимости нет. Примером служит геометрическая прогрессия

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , про которую в п.4.2 было доказано, что она не сходится на  $(-1,1)$  равномерно.

Продолжим доказательство теоремы. Выберем произвольную точку  $x \in (-R, R)$  и докажем, что степенной ряд непрерывен в этой точке. Для этого выберем число  $q$  так, чтобы выполнялись неравенства  $|x| < q < R$ . По предыдущей лемме, степенной ряд равномерно сходится на отрезке  $[-q, q]$ . Члены степенного ряда – непрерывные функции. По следствию 2 теоремы 1 п.4.3 ряд представляет собой функцию, непрерывную на этом отрезке. Следовательно, степенной ряд является непрерывной функцией в произвольной точке  $x \in (-R, R)$ .

**Следствие.** Если два степенных ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  в некоторой окрестности точки  $x = 0$  имеют одну и ту же сумму  $f(x)$ , то для всех  $n$  справедливы равенства  $a_n = b_n$ .

В указанной окрестности выполняется равенство

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

Подставляя в него  $x = 0$ , получаем  $a_0 = b_0$  и, следовательно,

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

Разделим обе части этого равенства на  $x$ , считая, что  $x \neq 0$ . В результате получим равенство

$$a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} + \dots = b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1} + \dots,$$

верное при  $x \neq 0$ . Просто подставить в это равенство  $x = 0$  нельзя. Перейдём в нём к пределу при  $x \rightarrow 0$ . Из непрерывности каждого из степенных рядов, стоящих в правой и левой части, следует равенство  $a_1 = b_1$ . Продолжая рассуждать аналогично, получаем, что для всех  $n$  справедливы равенства  $a_n = b_n$ .

Эта теорема означает, что если функция раскладывается в сходящийся к ней степенной ряд в некотором интервале сходимости, то это разложение единственно.

**Теорема 8.4 (теорема Абеля).** Если степенной ряд сходится в точке  $x = R$ , то его сумма непрерывна слева при этом значении  $x$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Если степенной ряд сходится в точке  $x = -R$ , то его сумма непрерывна справа при этом значении  $x$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow -R+0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

**Лемма.** Если степенной ряд сходится в точке  $x = R$ , то он сходится равномерно на отрезке  $[0, R]$ .

Представим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n, 0 \leq x \leq R$$

и применим признак Абеля.

### 8.3. Дифференцируемость и интегрируемость степенного ряда

**Теорема 8.5.** Степенной ряд в промежутке от 0 до  $x$ , где  $|x| < R$ , можно интегрировать почленно, то есть

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Значение  $x$  может совпадать и с точкой  $x = \pm R$ , если ряд сходится в этой точке.

По лемме из п.5.2 ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  сходится на  $[-|x|, |x|]$  равномерно. По следствию теоремы 1 п.4.4 получаем требуемое равенство.

**Теорема 8.6.** Степенной ряд представляет собой дифференцируемую функцию на всём интервале сходимости, кроме того, для любой точки  $x$  из этого интервала

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

**Следствие.** Обозначим  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Тогда для любого натурального  $k$  существует производная функции порядка  $k$  и справедливо равенство

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}.$$

**Замечание.** Из теорем 8.1 и 8.2 вытекает, что радиусы сходимости рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  не меньше, чем  $R$  — радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Однако эти радиусы не могут быть и больше, чем  $R$ . Докажем это, например, для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ .

Предположим, что радиус сходимости этого ряда равен  $R^*$ ,  $R^* > R$ . Продифференцируем этот ряд почленно и получим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . По доказанному выше, радиус сходимости  $R$  полученного ряда должен удовлетворять неравенству  $R \geq R^*$ . Это неравенство противоречит сделанному предположению.

Итак, радиус сходимости степенного ряда не меняется при его дифференцировании или интегрировании. Однако сходимость в концевых точках  $x = \pm R$  у продифференцированного ряда может пропасть.

### Пример.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  сходится на  $[-1, 1]$ . Однако ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$  сходится только на полуинтервале  $[-1, 1)$ . В самом деле, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  сходится по теореме Лейбница, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

Этот же пример показывает, что у проинтегрированного ряда может появиться сходимость в концевой точке.

## Глава 9. РЯД ТЕЙЛОРА. РАЗЛОЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

### 9.1 Ряд Тейлора

**Теорема 9.1.** Если степенной ряд  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  имеет ненулевой радиус сходимости  $R$ , вычисляемый формулой  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$  или  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}$ , и в интервале  $(-R, R)$  ряд сходится к сумме  $f(x)$ , то его коэффициенты равны

$$c_0 = f_0(0), c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство.

Так как

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots; \quad x \in (-R, R),$$

то  $f(0) = c_0$ .

Согласно теореме 8.6,

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots, \quad x \in (-R, R),$$

$$\text{то } f'(0) = c_1 \text{ или } c_1 = \frac{f'(0)}{1!}.$$

Последовательное применение следствия теоремы 8.6 даёт

$$f^{(k)}(x) = k(k-1)\dots(k-k+1)c_k + (k+1)k\dots(k+1-k+1)c_{k+1}x + \dots$$

для любого  $x \in (-R, R)$  и любого  $k \in \mathbb{N}$ , так что

$$f^{(k)}(0) = k! c_k \text{ или } c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 9.2.** Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$  имеет ненулевой радиус сходимости  $R$ , вычисляемый формулой  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$  или  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}$ ,

то в интервале его сходимости  $(-R + x_0, R + x_0)$  его сумма  $f(x)$ , представляема в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots, x \in (-R + x_0, R + x_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство.

Положив  $t = x - x_0$ , переведем ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$  в ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = g(t), t \in (-R, R) \text{ и } g(x - x_0) = f(x).$$

Согласно теореме 9.1,  $c_0 = g(0) = f(x_0)$  и  $c_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , поэтому будет справедлива формула (2).

Ряд, стоящий в правой части (2), называется **рядом Тейлора функции**  $f(x)$ . Итак, любой степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

Рассмотрим обратную задачу: всегда ли функция  $f$ , порождающая ряд Тейлора  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ , является его суммой. Оказывается, нет.

Даже если ряд Тейлора функции  $f$  сходится, он может иметь другую сумму.

**Замечание.** Если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$  сходится на интервале  $(a; b)$ , то радиус сходимости ряда равен половине длины интервала сходимости, то есть  $R = \frac{b-a}{2}$ .

### Пример.

Рассмотрим функцию  $f_0(x)$ ,

$$f_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}, & \text{если } x \neq x_0, \\ 0, & \text{если } x = x_0 \end{cases}$$

и положим  $t = x - x_0$  и рассмотрим функцию  $g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & \text{если } t \neq 0 \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

При  $t \neq 0$  можно посчитать  $g'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}$ , но  $g'(0)$  придется считать по определению, а именно:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}} - 0}{t} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \left\| \frac{1}{t^2} = z, \right\|_{z \rightarrow +\infty} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{e^{-z}}{\frac{1}{\sqrt{z}}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{z}}{e^z} = 0 \quad (\text{по правилу Лопиталя}). \end{aligned}$$

Аналогично можно посчитать при всех  $n > 1$ ,  $g^{(n)}(t)$  и  $g^{(n)}(0) = 0$ .

Поэтому  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_0^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . То есть мы получили, что ряд Тейлора, построенный по функции  $f_0(x)$ , не равной тождественно нулю, тождественно равен нулю.

Последний пример показывает также, что если  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  есть ряд Тейлора функции  $f(x)$ , то он же является рядом Тейлора бесконечного множества других функций вида  $f + cf_0$ ,  $c \in \mathbb{R}$  – произвольное, поскольку

$$(f + cf_0)(x_0) = f(x_0) \text{ и } (f + cf_0)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + cf_0^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ .

То есть, если функция раскладывается в сходящийся к ней степенной ряд, то это разложение единственно и является рядом Тейлора этой функции. Но сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора бесконечного числа функций.

## 9.2. Сходимость ряда Тейлора к его производящей функции

Предположим, что функция  $f$  бесконечно дифференцируема в интервале  $I$  и точка  $x_0 \in I$ , и что промежуток  $J$  сходимости её ряда Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

накрывает  $I$  (названные условия необходимы для решения задачи, сформулированной в заголовке пункта, в силу доказанных в предыдущем параграфе свойств степенных рядов). Частные суммы ряда  $S_n(x) = P_n(x; x_0, f)$ ,  $x \in J$ ,  $n \in N$  — многочлены Тейлора функции  $f$  в точке  $x_0$ . Поэтому сумма ряда

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x; x_0, f)$$

для всех  $x \in I$  и  $S(x) = f(x)$  для  $x \in I \subset J$  тогда и только тогда, когда

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - P_n(x; x_0, f)) = 0$  для каждого  $x \in I$ . Поскольку в интервале  $I$  для функции  $f$  справедлива формула Тейлора, то

$$f(x) - P_n(x; x_0, f) = r_n(x; x_0, f), \quad x \in I, \quad n \in N, \quad (2)$$

где  $r_n(x; x_0, f)$  —  $n$ -й остаточный член в формуле Тейлора функции  $f$  на интервале  $I$ . Таким образом, имеет место следующее

**Утверждение.** Если функция  $f$  бесконечно дифференцируема в интервале  $I$  и точка  $x_0 \in I$ , то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in I, \quad (3)$$

тогда и только тогда, когда последовательность  $(r_n(x))$  остаточных членов  $r_n(x) = r_n(x; x_0, f)$ ,  $n \in N$  в её формуле Тейлора на  $I$  сходится к нулевой функции для всех  $x \in I$ .

Укажем простое достаточное условие для справедливости утверждения (3).

**Теорема 9.3** Если функция  $f$  бесконечно дифференцируема на отрезке между  $x_0$  и  $x$  (на  $\mathbb{R}$ ) и все её производные функции  $f^{(n)}(t)$ ,  $n \in N$ , равномерно ограничены на этом отрезке, то  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ ; то есть ряд Тейлора функции  $f$  сходится в точке  $x$  к сумме  $f(x)$ .

Доказательство.

Рассмотрим остаточные члены  $r_n(x; x_0, f)$  в форме Лагранжа

$$r_n(x; x_0, f) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

По условию теоремы, существует число  $M > 0$ , что  $|f^{(n)}(t)| \leq M$  для всех  $t$  между  $x_0$  и  $x$ , и всех  $n \in N$ . Поэтому,

$$|r_n(x; x_0, f)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}, x \neq x_0. \quad (4)$$

Обозначим

$$u_n = \frac{M}{n!} |x - x_0|^n, x \neq x_0, n \in N.$$

Тогда  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x-x_0|}{n+1}$ ,  $n \in N$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ .

Согласно признаку Даламбера, ряд  $\sum u_n$  сходится, и следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . На основании (2),  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x; x_0, f) = 0$  и справедливо утверждение (3).

### 9.3. Ряды Тейлора элементарных функций

I. Функция  $f(x) = e^x$ . Для нее

$$f^{(n)}(x) = e^x, x \in \mathbb{R}, n \in N, \text{ и } f^{(n)}(0) = f(0) = 1, n \in N.$$

Для произвольного фиксированного  $x \in \mathbb{R}$  справедливо

$$|f^{(n)}(t)| = e^t \leq e^{|x|}$$

для всех  $t$  между 0 и  $x$ , и всех  $n \in N$ .

Согласно теореме предыдущего пункта,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Для сумм  $r_n(x)$  остатков ряда (5) справедлива оценка (4), в которой

$M = e^{|x|}$  и  $x_0 = 0$ , так что  $|r_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in N$ , и последняя оценка указывает на скорость сходимости ряда (5) в точках  $x \in \mathbb{R}$ .

II. Функция  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  имеет

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}k\right), |f^{(k)}(x)| \leq 1, x \in \mathbb{R}, \forall k \in N,$$

и, следовательно, её формула Тейлора переходит в ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Для сумм  $r_n(x)$  остатков ряда (6) в силу (4) справедливы оценки

$$|r_{2n}(x)| \leq \frac{1}{(2n)!} |x|^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in N.$$

III. Функция  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , имеет

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}k\right), \quad |f^{(k)}(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in N, \text{ и следовательно,}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Для сумм  $r_n(x)$  остатков ряда (7) на основании (4) справедливы оценки

$$|r_{2n+1}(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} |x|^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in N.$$

IV. Функция  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x > -1$ , имеет

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

и радиус сходимости ряда равен 1. Поэтому

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} x^{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

откуда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1), \quad (8)$$

поскольку  $f(0) = \ln 1 = 0$ . В  $x = 1$  имеем ряд Лейбница  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ ; в точке  $x = -1$  получается расходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , так что промежуток сходимости ряда (6) служит  $(-1, 1]$ .

V. Биномиальный ряд.

**Утверждения этого пункта V приводятся без подробного доказательства.**

Разложим в степенной ряд функцию  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $x > -1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Если  $\alpha \in N$ , то  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + x^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} C_{\alpha}^k x^k$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Если  $\alpha = 0$ , то  $f(x) \equiv 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus N_0$ ,  $N_0 = N \cup \{0\}$ .

Тогда  $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \dots, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

и при  $n > \alpha$  функция  $f^{(n)}$  не существует в точке  $x = -1$ . Отсюда следует, что радиус сходимости  $R$  степенного ряда для  $f$  удовлетворяет условию  $R \leq 1$ .

Вычисление радиуса даёт  $R = 1$ . Кроме того,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, |x| < 1 \text{ или } x \in (-1,1). \quad (9)$$

В точке  $x = -1$  получаем ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad (10)$$

который абсолютно сходится при  $\alpha > 0$  и расходится при  $\alpha < 0$ ;

в точке  $x = 1$  – ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad (11)$$

абсолютно сходится при  $\alpha > 0$ , сходится условно при  $-1 < \alpha < 0$  и ряд расходится при  $\alpha \leq -1$ .

VI. Используемый в п. IV приём можно применять к любому степенному ряду с ненулевым радиусом сходимости. Продемонстрируем его на примере разложения в степенной ряд функции  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

Имеем  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1,1), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{и } f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x 1 \cdot dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1), \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{arctg} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \dots, \quad (13)$$

поскольку  $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$ .

#### 9.4. Экспоненциальная функция комплексного переменного

Степенной ряд  $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  абсолютно сходится для всех  $z \in \mathbb{C}$ , поскольку для его общего члена  $a_n(z) = \frac{z^n}{n!}$  при  $z \neq 0$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1,$$

и применяем признак Даламбера.

Обозначим  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

**Теорема.**  $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Без доказательства.

Таким образом, функция  $\exp(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , удовлетворяет такому же функциональному уравнению, что и экспоненциальная функция  $e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Кроме того, если  $z = x$ , то  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Поэтому, по определению, обозначают  $\exp(z) = e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , и

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (14)$$

Если в (14) положить  $z = ix$ ,  $i^2 = -1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , и заметить, что

$$i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad \text{то:}$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \cos x + i \sin x,$$

$x \in \mathbb{R}$ .

Таким образом, **доказана формула Эйлера:**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Она справедлива и для комплексных  $z \in \mathbb{C}$  в виде  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

Прямым следствием теоремы и формулы Эйлера будет формула Муавра – Эйлера:  $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Доказательство.

$$(e^{ix})^n = e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и применяем формулу Эйлера.

## Глава 10. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

### 10.1. Ортонормированные системы функций

Множество функций, определенных на некотором отрезке  $[a, b]$ , образует векторное пространство относительно обычного сложения и умножения функции на число. Легко доказать, что это пространство не является конечномерным, так как, например, функции  $x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$  линейно независимы.

Предположим, что определено **скалярное произведение**, то есть билинейная функция, сопоставляющая каждой паре рассматриваемых функций  $f(x)$  и  $g(x)$  некоторое число, обозначаемое  $(f(x), g(x))$ , причем, выполняются свойства

1.  $(f(x), g(x)) = (g(x), f(x))$
2.  $(f(x), f(x)) \geq 0$ , причем,  $(f(x), f(x)) = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \equiv 0$ .
3.  $(\alpha f(x) + \beta h(x), g(x)) = \alpha(f(x), g(x)) + \beta(h(x), g(x))$ .

Далее будем обозначать скалярное произведение кратко:  $(f, g)$ .

Имея скалярное произведение, определим норму функции  $\|f\|$  равенством  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ .

**Определение.** Система функций называется **ортogonalной**, если для любых различных функций  $f(x)$  и  $g(x)$  из этой системы имеем  $(f, g) = 0$ .

Ортogonalная система функций называется **ортонормированной**, если для любой функции этой системы имеет место равенство  $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = 1$ .

Любую ортogonalную систему функций, не содержащую тождественно равную нулю функцию, можно преобразовать в ортонормированную систему функций, положив для любой функции  $f(x)$  из этой системы  $\varphi(x) = \frac{f}{\|f\|}$ .

Рассмотрим пример **скалярного произведения интегрируемых функций**  $f(x)$  и  $g(x)$ , определенного равенством

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Легко видеть, что это равенство обладает свойствами 1 и 3 скалярного произведения. Что касается свойства 2, то оно не выполняется для функций,

которые являются интегрируемыми, но не являются непрерывными, то есть из равенства  $\int_a^b f^2(x)dx = 0$  не следует, что  $f(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ . Например, для функции  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [-1, 1], x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$ , которая не равна тождественно нулю, будет выполняться, что  $\int_{-1}^1 f^2(x)dx = 0$ . Ситуация исправится, если мы будем рассматривать только непрерывные функции.

**Лемма 10.1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $a < b$ , и если  $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ , то  $f(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ .

Доказательство.

Если бы тождество  $f(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$  не выполнялось, то нашлась бы такая точка  $x_0$ , в которой  $f^2(x_0) > \varepsilon > 0$ . Так как функция непрерывна, то найдется такая окрестность  $(\alpha, \beta)$  этой точки, принадлежащая промежутку  $[a, b]$ , что в ней справедливо неравенство  $f^2(x) > \frac{\varepsilon}{2}$ . Следовательно,

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f^2(x)dx \geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\beta - \alpha),$$

что противоречит условию леммы.

Для интегрируемых функций определение ортогональности принимает вид:

**Определение 10.2.** Две интегрируемые функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются ортогональными на  $[a, b]$ , если  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ .

Конечная или бесконечная система функций называется *ортогональной* на отрезке  $[a, b]$ , если любые две функции этой системы ортогональны на этом отрезке.

Важный пример ортогональной системы функций дает тригонометрическая система функций.

**Теорема 10.1.** Тригонометрическая система  $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^\infty$  ортогональна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Доказательство.

Сначала установим ортогональность каждой функции с первой из них:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \cdot \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} (\sin n\pi - \sin(-n\pi)) = \frac{1}{n} (0 - 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx &= \frac{1}{n} \cdot \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = \\ &= \frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos(n\pi)) = 0. \end{aligned}$$

Опираясь на известные тригонометрические формулы

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)),$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)),$$

получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n - m)x + \cos(n + m)x) dx = 0, n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n - m)x - \cos(n + m)x) dx = 0, n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n + m)x + \sin(n - m)x) dx = 0.$$

Последнее равенство выполняется и при  $n = m$ .

## 10.2. Коэффициенты Фурье

Рассмотрим множество функций, определенных на некотором отрезке  $[a, b]$ . Оно образует векторное пространство относительно обычного сложения и умножения функции на число. Пусть определено некоторое скалярное произведение. И пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  — некоторая ортонормированная система.

### Определение 10.3. Числа

$$c_n = (f, \varphi_n)$$

называются *коэффициентами Фурье* функции  $f$ . А ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

называется *рядом Фурье* функции  $f$ .

Вопрос о сходимости ряда Фурье сложен и будет исследован позже. Пока будем использовать формальную запись

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

означающую, что функции  $f$  соответствует ее ряд Фурье.

### 10.3. Тригонометрический ряд Фурье, его коэффициенты

**Определение 10.4.** *Тригонометрическим многочленом* называется функция вида

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos kx + B_k \sin kx,$$

где  $A_0, A_k, B_k, (k = 1, \dots, n)$  – действительные числа. Если  $A_n^2 + B_n^2 \neq 0$ , то число  $n$  называется **порядком (степенью)** тригонометрического многочлена и имеет место обозначение  $\deg T = n$ .

Функциональный ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

называется **тригонометрическим рядом**. Коэффициенты ряда  $A_0, A_k, B_k, k = 1, \dots, n, \dots$  – произвольные действительные числа. **Частные суммы** тригонометрического ряда

$$S_0 = \frac{A_0}{2}, \quad S_n = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos kx + B_k \sin kx, \quad n \in \mathbb{N}$$

являются тригонометрическими многочленами порядка  $\deg S_n \leq n$ .

Пусть функция  $f(x)$  определена и интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$  (то есть  $f \in R([-\pi, \pi])$ ). Числа

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

называются **коэффициентами Фурье** функции  $f$ .

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

(независимо от того, сходится он или расходится) коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье функции  $f \in R([-\pi, \pi])$ , называется **рядом Фурье этой функции**.

Связь между функцией  $f(x)$  и ее рядом Фурье принято обозначать так:

$$f(x) \Big|_{x \in [-\pi, \pi]} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Частными суммами  $S_n(x)$  ряда Фурье функции  $f(x)$  будут тригонометрические многочлены

$$S_0 = \frac{a_0}{2}, \quad S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad n \in \mathbb{N}$$

являются тригонометрическими многочленами порядка  $\deg S_n \leq n$ .

Разумеется, если функция  $f(x)$  разрывна, то ее ряд Фурье не будет равномерно сходиться к ней (сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна).

Однако справедлива следующая теорема.

**Теорема 10.4.** Равномерно сходящийся на  $[-\pi, \pi]$  тригонометрический ряд  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$  является рядом Фурье своей суммы.

Доказательство.

Пусть тригонометрический ряд  $\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$  равномерно сходится на  $[-\pi, \pi]$ , и  $f(x)$  – его сумма, то есть

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx = f(x)$$

и функция  $f(x)$  непрерывна на  $[-\pi, \pi]$ . Более того, пусть  $f(x)$  – непрерывная и  $2\pi$ -периодическая функция на всем множестве  $\mathbb{R}$ .

Интегрируя почленно этот ряд и учитывая ортогональность тригонометрических функций, получим, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A_0}{2} dx = A_0,$$

и поскольку  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ , то  $A_0 = a_0$ .

Умножив равенство  $\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx = f(x)$  скалярно на  $\cos kx$  и проинтегрировав, найдем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_k \cos^2 kx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_k (1 + \cos 2kx) \, dx = A_k.$$

и поскольку  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ , то  $A_k = a_k$ .

Аналогично, умножив равенство  $\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$  скалярно на  $\sin kx$ , покажем, что  $B_k = b_k$ , так как  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ .

Тригонометрический многочлен  $T(x)$ ,  $\deg T \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  можно считать (конечным) тригонометрическим рядом, имеющим нулевые коэффициенты для всех индексов, больших  $n$ , и поэтому равномерно сходящимся на всем множестве  $\mathbb{R}$ . Согласно теореме 10.4, многочлен  $T(x)$  совпадает со своим (конечным) рядом Фурье, коэффициенты которого равны нулю для всех индексов, больших индекса  $n = \deg T$ . В частности, указанным свойством обладают частные суммы ряда Фурье, то есть справедливо следующее утверждение.

**Следствие.** Для любого  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  частные суммы  $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$

ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

функции  $f(x) \in R([- \pi, \pi ])$  имеют одинаковые с  $f$  коэффициенты Фурье для всех индексов  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

## 10.4. Коэффициенты Фурье четных и нечетных функций.

### Примеры

Напомним, что если функции  $f(x), g(x) \in R([-a, a])$  и  $f(x)$  – четная, а  $g(x)$  – нечетная, то

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$

$$\int_{-a}^a g(x) \, dx = 0.$$

Поэтому, если функция  $f(x) \in R([- \pi, \pi ])$  и  $f(x)$  – четная, то ее коэффициенты Фурье равны

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{и} \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

поэтому

$$f(x) \Big|_{x \in [-\pi, \pi]} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

А если  $f(x)$  – нечетная, то

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{и} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

поэтому

$$f(x) \Big|_{x \in [-\pi, \pi]} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

### Пример.

Рассмотрим  $2\pi$ -периодическую четную функцию

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(-\pi) = f(\pi).$$

Тогда  $b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$  и

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n} x \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right) \Big|_0^\pi = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поэтому  $a_0 = \pi, \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{\pi(2k-1)^2}, \quad k = 1, 2, \dots$  (соответствующие преобразования будут подробно рассмотрены на семинарах) и

$$f(x) \Big|_{x \in [-\pi, \pi]} = |x| \Big|_{x \in [-\pi, \pi]} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

Поскольку полученный тригонометрический ряд Фурье равномерно сходится на  $\mathbb{R}$  по признаку Вейерштрасса

(сходится мажорирующий ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ ), то в точке  $x = 0$  получим

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

откуда получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

поэтому

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \cdot A,$$

откуда  $A = \frac{\pi^2}{6}$ , так что

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## 10.5. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке

Мы установили, что равномерно сходящийся тригонометрический ряд есть ряд Фурье своей суммы (теорема 10.4). Аналогичным свойством обладают ряды Тейлора: степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы. В случае рядов Тейлора расходимость в точке обязательно ведет к расходимости и в одной из половин окрестности точки. Это свойство рядов Тейлора не переносится на ряды Фурье. Ряд Фурье может быть расходящимся в каких-то точках и одновременно быть сходящимся в окрестности этих точек.

Рассмотрим произвольную функцию  $f(x) \in R([- \pi, \pi])$  и потребуем дополнительно, чтобы  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Тогда функция  $f$  продолжается на всю числовую прямую  $(-\infty, +\infty)$ , как  $2\pi$ -периодическая функция, которая при этом будет интегрируемой на любом отрезке  $[a, b]$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ . Обратно, любую  $2\pi$ -периодическую функцию  $f$  на  $(-\infty, +\infty)$  считаем определенной на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и удовлетворяющей условию  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

Укажем теперь достаточные условия сходимости ряда Фурье функции  $f(x) \in R([- \pi, \pi])$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$  в точках интервала  $(-\pi, \pi)$ .

**Теорема 10.5.** В точке  $x_0$ , в которой функция  $f$  дифференцируема или, по крайней мере, имеет обе конечные односторонние производные, ряд Фурье сходится, причем его сумма равна  $f(x_0)$ . В точке  $x_0$  разрыва первого рода функции  $f$  для сходимости ее ряда Фурье достаточно предположить существование конечных пределов справа и слева, причем тогда сумма ряда будет равна  $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ .

## 10.6. Обобщенные тригонометрические ряды Фурье

До сих пор мы говорили о разложении функций, имеющих период  $2\pi$ , в ряд по системе  $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ . Однако могут быть и функции, период которых  $2l$  отличен от  $2\pi$ . В этом случае, если число  $\frac{\pi}{l}$  не является целым, то нельзя разложить функцию в ряд по системе  $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ . Но можно раскладывать такие функции в ряд по системе  $\left\{1, \cos \frac{\pi nx}{l}, \sin \frac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ . Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx$$

и тогда

$$f(x) \Big|_{x \in (-l, l)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l}.$$