

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В.ЛОМОНОСОВА

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ**

В.Г.Чирский

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

АНАЛИЗ

**Материалы для подготовки к экзамену студентов бакалавриата
(2 СЕМЕСТР)**

МОСКВА 2026

«УТВЕРЖДАЮ»
Заведующий кафедрой математического анализа, академик
_____ /В.А. Садовничий/
_____ 2026 г.

**Вопросы экзамена по математическому анализу для студентов 1 курса
бакалавриата химического факультета МГУ (2 семестр)**

1. Неопределённый интеграл и его основные свойства. Таблица неопределённых интегралов.
2. Интегрирование рациональных функций.
3. Интегрирование некоторых иррациональных функций и некоторых тригонометрических функций.
4. Площадь плоской фигуры. Определённый интеграл.
5. Суммы Дарбу и их свойства.
6. Критерий интегрируемости. Интегрируемость монотонной функции Интегрируемость непрерывной функции.
7. Свойства определённого интеграла.
8. Теоремы о среднем. Интеграл с переменным верхним пределом. . Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определённых интегралов.
9. Приложения интеграла: площадь фигуры, площадь в полярных координатах, объём тела.
10. Приложения интеграла: длина дуги кривой и площадь поверхности вращения.
11. : Несобственные интегралы и обобщение понятия площади плоской фигуры.
Сходимости интегралов
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \int_0^1 \frac{dx}{x^q}$. Критерии существования несобственных интегралов
12. Теоремы о сравнении для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Абсолютно сходящиеся интегралы. Условно сходящиеся интегралы.
13. Пространство $\mathbb{R}^n$, множества в нём.
14. Функции, отображения, их пределы и непрерывность.
15. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости функции.
16. Дифференциал. Производная сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
17. Касательная плоскость. Производная по направлению. Градиент.
18. Производные и дифференциалы высших порядков. Формулы Тейлора.
19. Экстремумы функций нескольких переменных.
20. Неявная функция.
21. Система неявных функций(без док-ва)
22. Условный экстремум.

Лектор профессор

В.Г.Чирский

Билет 1. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица неопределённых интегралов

Основное определение

Пусть $f(x)$ определена в промежутке X . Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией для $f(x)$** , если для любого $x \in X$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Основная лемма интегрального исчисления.

Если в некотором промежутке X (конечном или бесконечном) функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то и любая функция $F(x) + C$ - тоже является первообразной для $f(x)$. Обратно, для любой первообразной функции $\Phi(x) = F(x) + C$.

Доказательство.

Очевидно, $(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ и первая часть теоремы доказана. Пусть $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная для $f(x)$. Рассмотрим разность $\Phi(x) - F(x)$.

Производная этой функции $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. По следствию из теоремы Лагранжа получим, что $\Phi(x) = F(x) + C$, что и требовалось доказать.

Множество первообразных для функции $f(x)$ на заданном промежутке называется её неопределённым интегралом и обозначается так : $\int f(x)dx$.

По доказанной лемме, оно имеет следующую структуру: $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$, где $F(x)$ - произвольная первообразная, а C - произвольная постоянная. Обычно используется обозначение

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

в котором первая часть равенства обозначает не одну из функций, а всё семейство функций, образующих интеграл.

Таблицы основных интегралов.

Каждая формула $F'(x) = f(x)$ сразу приводит к соответствующей формуле

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Поэтому, используя формулы для произвольных элементарных функций получим следующую таблицу:

$$1. \quad \int 0 \cdot dx = C$$

$$2. \quad \int 1 \cdot dx = x + C$$

$$3. \quad \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1.$$

$$4. \quad \int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & \text{если } x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Эти формулы часто соединяют в одну : $\ln|x| + C$. При этом следует иметь в виду, что множество, на котором определена функция $f(x) = \frac{1}{x}$, состоит из двух промежутков, задаваемых неравенствами $x > 0$ и $x < 0$, соответственно. На каждом из этих промежутков постоянную можно выбирать независимо, что и отражено в формуле 4. Так что формулу $\ln|x| + C$ не следует понимать так, что к функции $\ln|x|$ прибавляется одна и та же постоянная C так же как и при $x > 0$, так и при $x < 0$. Еще раз повторим – точный смысл дан равенством 4.

Это же замечание можно сделать для формулы 3) при $\mu < 0$ и таком, что x^μ определена как при $x > 0$, так и при $x < 0$.

$$5. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ в частности, } \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

точнее говоря, так как функция определена на бесконечном множестве промежутков $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, для каждого n следует выбирать свою постоянную C_n .

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C$$

точнее говоря, так как функция определена на бесконечном множестве промежутков $\pi n < x < \pi(n+1)$, $n \in Z$, для каждого n следует выбирать свою постоянную C_n .

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctgx} + C,$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$$

Правила интегрирования

1. Если $a \neq 0$, то

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

Замечание. При $a = 0$ формула неверна по двум причинам. Во-первых, может не существовать интеграл в правой ее части, в то время как интеграл в левой ее части существует для любой функции $f(x)$ и равен произвольной постоянной. Во-вторых, даже в случае существования интеграла $\int f(x)dx$ правая часть в формуле равна 0 и опять не совпадает с ее левой частью.

$$2. \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

3. Если $\int f(t)dt = F(t) + C$, где $f(t)$ - непрерывная функция, то для любой функции $t = \varphi(x)$, такой $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ - непрерывные функции и такой, что $f(\varphi(x))$ - определена, имеет место равенство

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Это правило сразу следует из теоремы о производной сложной функции.

4. Пусть $U = f(x)$ и $V = g(x)$ - непрерывные функции и пусть $f'(x) = U'$, $V' = g'(x)$ - тоже непрерывные функции.

Тогда $\int U dV = UV - \int V dU$.

Формула вытекает из формулы для производной произведения.

Билет 2. Интегрирование рациональных функций

Алгебраическое введение

Рассмотрим некоторые нужные нам в дальнейшем сведения алгебраического характера. Всякая рациональная функция может быть представлена в виде дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами; т.е.

$$P(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m, b_0 \neq 0$$

$$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n;$$

Не нарушая общности, можно считать, что $a_0 = 1$.

Такую дробь называют обычно рациональной дробью. Если $m < n$, то рациональная дробь называется правильной; если же $m \geq n$ – неправильной. Если рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ является неправильной, то делением числителя на знаменатель она может быть представлена в виде суммы

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad (1)$$

в которой $S(x)$ (частное) – многочлен с показателем степени k ($k = m - n$) и $R(x)$ (остаток) – тоже многочлен, показатель степени которого ниже показателя степени n многочлена $Q(x)$. Таким образом, неправильная рациональная дробь может всегда быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

В высшей алгебре доказывается, что всякая правильная рациональная дробь представима в виде суммы некоторого количества так называемых простейших дробей следующих четырех типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a},$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^\alpha}, (\alpha = 2, 3, 4 \dots),$$

$$\text{III. } \frac{Mx + N}{x^2 + px + q},$$

$$\text{IV. } \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta}, (\beta = 2, 3, 4 \dots),$$

где A, m, N, a, p, q – постоянные действительные числа и $\frac{p^2}{4} - q < 0$ (или $q - \frac{p^2}{4} > 0$); т.е. трехчлен $x^2 + px + q$ не раскладывается на множители.

Рассмотренные нами четыре случая полностью решают вопрос о возможности представления всякой правильной рациональной дроби в виде суммы простых дробей. Теперь встаёт вопрос: как в том или ином случае практически находятся постоянные коэффициенты в числителях простых дробей соответствующего разложения? Это делается обычно с помощью так называемого метода неопределённых коэффициентов, который состоит в следующем.

Записывают соответствующее разложение с буквенными коэффициентами. Далее приводят все дроби к общему знаменателю, которым, естественно, будет $Q(x)$.

Отбрасывая слева и справа этот знаменатель, приходят к равенству двух многочленов, тождественному относительно x : справа с буквенными коэффициентами, слева – с конкретными числами. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , приходят к системе уравнений, из которой и находят значения буквенных коэффициентов.

1.2. Неопределенный интеграл от рациональной функции

Теорема. *Неопределённый интеграл от всякой рациональной функции всегда выражается в конечном виде через алгебраические, логарифмические и обратные тригонометрические (круговые) функции; т. е., в конце концов, через элементарные функции.*

Доказательство. ◀ Всякую рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы многочлена степени k , если показатель степени числителя $P(x)$ на k единиц выше показателя степени знаменателя $Q(x)$, и простых дробей типов I-IV.

Тогда нахождение интеграла от данной рациональной функции приведет к нахождению интегралов от многочлена и от простых дробей. Рассмотрим все возможные случаи интегрирования.

Интеграл от многочлена степени k есть многочлен степени $k + 1$. Действительно,

$$\int (C_0 x^k + C_1 x^{k-1} + \dots + C_k) dx = \frac{C_0 x^{k+1}}{k+1} + \frac{C_1 x^k}{k} + \dots + C_k x + C \quad (\text{алгебраическая функция}).$$

Интегралы простых дробей I и II типов выражаются через логарифмические и алгебраические функции. Действительно,

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^\alpha} = -\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + C, \quad (\alpha = 2, 3, 4, \dots)$$

Интегралы простых дробей III и IV типов выражаются через алгебраические, логарифмические и обратные тригонометрические функции. Имеем сначала

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{Mx + N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dx$$

Пусть $x + \frac{p}{2} = z$, тогда $dx = dz$ и $Mx + N = Mz + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)$. Обозначим

$$q - \frac{p^2}{4} = a^2 \quad (\text{т. к. } q - \frac{p^2}{4} > 0). \quad \text{Получаем}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mz + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{z^2 + a^2} dz = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2z dz}{z^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{M}{2} \ln(z^2 + a^2) + \frac{1}{a} \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x и подставляя вместо a его значение, получаем

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M\left(x + \frac{p}{2}\right)}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

Осталось указать только способ вычисления интеграла

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\delta} dx, \quad (\delta = 2, 3, 4, \dots).$$

Сделав преобразование и подстановку так же, как и в предыдущем случае, получаем

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\delta} dx = \int \frac{Mz + (N - \frac{Mp}{2})}{(z^2 + a^2)^\delta} dz = \frac{M}{2} \int \frac{2z dz}{(z^2 + a^2)^\delta} + (N - \frac{Mp}{2}) \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^\delta}$$

Первый из этих интегралов находим подстановкой $v = z^2 + a^2$, т. е.,

$$\int \frac{2z dz}{(z^2 + a^2)^\delta} = \int \frac{dv}{v^\delta} = -\frac{1}{\delta-1} \cdot \frac{1}{v^{\delta-1}} + C = -\frac{1}{\delta-1} \cdot \frac{1}{(z^2 + a^2)^{\delta-1}} + C.$$

Второй интеграл $\int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^\delta}$ находим с помощью рекуррентной формулы

$$I_\delta = \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^\delta} = z \cdot \frac{1}{(z^2 + a^2)^\delta} + \delta \int \frac{2z^2 dz}{(z^2 + a^2)^{\delta+1}} = z \cdot \frac{1}{(z^2 + a^2)^\delta} + 2\delta \int \frac{(z^2 + a^2 - a^2) dz}{(z^2 + a^2)^{\delta+1}} = z \cdot \frac{1}{(z^2 + a^2)^\delta} + 2\delta I_\delta - 2\delta a^2 I_{\delta+1},$$

откуда

$$I_{\delta+1} = \frac{(2\delta-1)I_\delta}{2\delta a^2} + \frac{z}{2\delta a^2 (z^2 + a^2)^\delta}, \delta = 0, 1, 2, \dots$$

Применяя эту формулу $\delta-1$ раз, мы приходим к вычислению интеграла

$$\int \frac{dz}{z^2 + a^2}, \text{ но } \int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + c$$

Во всех полученных таким образом результатах заменяем z через x . На основании этих результатов выписываем, наконец, выражение для

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\delta} dx, \text{ которое } \underline{\text{представляет собой выражение, содержащее}}$$

алгебраическую и обратную тригонометрическую функцию. ◀

Билет 3

Интегрирование некоторых иррациональных и некоторых тригонометрических функций

Выше мы научились интегрировать в конечном виде рациональные функции. В дальнейшем основным приемом интегрирования тех или других классов дифференциальных выражений будет разыскивание таких подстановок $t = \omega(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду и дали бы возможность представить интеграл в конечном виде функции от t . Если при этом сама функция $\omega(x)$, которую надлежит подставить вместо t , выражается через элементарные функции, то интеграл представится в конечном виде функции от x .

Назовем этот прием методом рационализации подынтегрального выражения.

В качестве первого примера его применения рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx,$$

Где R означает рациональную функцию от двух аргументов, m - натуральное число, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - постоянные.

Положим

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

Интеграл перейдет в

$$\int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt;$$

Здесь дифференциал имеет уже рациональный вид, так как R, φ, φ' - рациональные функции. Вычислив этот интеграл по правилу предыдущего параграфа, к старой переменной вернемся, подставив $t = \omega(x)$.

К интегралу вида (1) сводятся и более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \dots\right) dx,$$

где все показатели $r, s, \dots$ рациональные числа; стоит лишь привести эти показатели к общему знаменателю m , чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию x от

$$\text{радикала } \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}.$$

Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$. Подстановки Эйлера

Переходим к рассмотрению очень важного класса интегралов

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx.$$

Предполагаем, конечно, что квадратный трёхчлен не имеет равных корней, так что корень из него может быть заменён рациональным выражением. Мы изучим подстановку, называемую подстановкой Эйлера (L. Euler), с помощью которой можно достигнуть здесь рационализации подынтегрального выражения.

Подстановка приложима в случае, если $a > 0$. Тогда полагают $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}$. Возводя это равенство в квадрат, найдём (по уничтожении членов ax^2 в обеих частях) $bx + c = t^2 - 2\sqrt{at}x$, так что

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{at^2 + bt + c}\sqrt{a}}{2\sqrt{at} + b},$$

$$dx = 2 \frac{\sqrt{at + bt + c}\sqrt{a}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt.$$

Всё остроумие подстановки Эйлера именно в том, что для определения x получается уравнение первой степени, так что x , а одновременно с ним также и радикал $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ выражаются рационально через t . В результате, возвращаясь к x , нужно будет положить $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax}$

Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Интегрирование дифференциалов вида $R(\sin x, \cos x)dx$.

Дифференциалы этого вида всегда могут быть рационализированы подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} (-\pi < x < \pi)$. Действительно,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

так что

$$R(\sin x, \cos x)dx = R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Таким образом, интегралы типа $\int R(\sin x, \cos x)dx$ всегда берутся в конечном виде; для их выражения, кроме функций, встречающихся при интегрировании рациональных дифференциалов, нужны лишь ещё тригонометрические функции.

Упомянутая подстановка, являющаяся универсальной для интеграла типа (1), приводит иной раз к сложным выкладкам. Ниже указаны случаи, когда цель может быть достигнута с помощью более простых подстановок. Предварительно сделаем следующие элементарные замечания из области алгебры.

Если целая или дробная рациональная функция $R(u, v)$ не меняет своего значения при изменении знака одного из аргументов, например, u , т.е. если

$$R(-u, v) = R(u, v)$$

то она может быть приведена к виду

$$R(u, v) = R_1(u^2, v),$$

содержащему лишь чётные степени u .

Если же, наоборот, при изменении знака u функция $R(u, v)$ также меняет знак, т.е. если

$$R(-u, v) = -R(u, v)$$

то она приводится к виду

$$R(u, v) = R_2(u^2, v)u;$$

Это сразу вытекает из предыдущего замечания, если его применить к функции $\frac{R(u, v)}{u}$.

I. Пусть теперь $R(u, v)$ меняет знак при изменении знака u ;

Тогда

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx = -R_0(1 - \cos^2 x, \cos x)d \cos x,$$

и рационализация достигается подстановкой $t = \cos x$.

II. Аналогично, если $R(u, v)$ меняет знак при изменении знака v , то

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0^*(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx = -R_0^*(\sin x, 1 - \sin^2 x)d \sin x,$$

так что здесь целесообразна подстановка $t = \sin x$.

III. Предположим наконец, что функция $R(u, v)$ не меняет своего значения при одновременном изменении знаков u и v

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

В этом случае, заменяя u на $\frac{u}{v}v$, будем иметь $R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right)$.

По свойству функции R , если изменить знаки u и v (отношение $\frac{u}{v}$ при этом не изменится),

$$R^*\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

а тогда, как мы знаем,

$$R^*\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1^*\left(\frac{u}{v}, v^2\right)$$

Поэтому

$$R(\sin x, \cos x) = R^*(\sin x, \cos^2 x) = R_1^*\left(\sin x, \frac{1}{1 + \tan^2 x}\right),$$

т.е. попросту

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\tan x).$$

Здесь достигает цели подстановка $t = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$, ибо

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(t) \frac{dt}{1+t^2} \text{ и т.д.}$$

Замечание. Нужно сказать, что каково бы ни было рациональное выражение $R(u, v)$, его всегда можно представить в виде суммы трёх выражений рассмотренных выше частных типов. Например, можно положить

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} + \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}$$

Первое из этих выражений меняет знак при изменении знака u , второе меняет знак при изменении знака v , а третье сохраняет значение при одновременном изменении знака u и v . Разбив выражение $R(\sin x, \cos x)$ на соответствующие слагаемые, можно к первому из них применить подстановку $t = \cos x$, ко второму подстановку $t = \sin x$ и, наконец, к третьему — подстановку $t = \tan x$ типа. Таким образом, для вычисления интегралов типа (1) достаточно этих трёх подстановок.

Для вычисления интегралов.

$$\int \sin ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx, \int \cos ax \cos bxdx$$

используются формулы

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x).$$

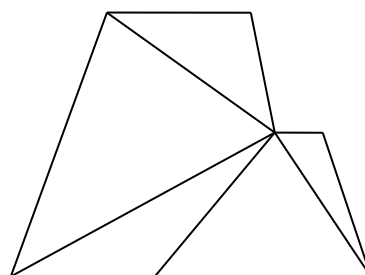
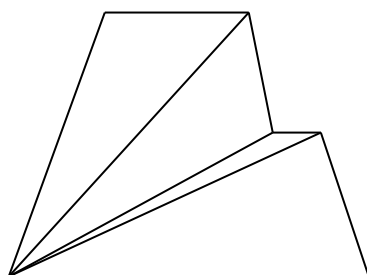
Билет 4. Площадь плоской фигуры. Определённый интеграл

Задача о вычислении площади плоской фигуры, ограниченной кривыми линиями, является весьма актуальной.

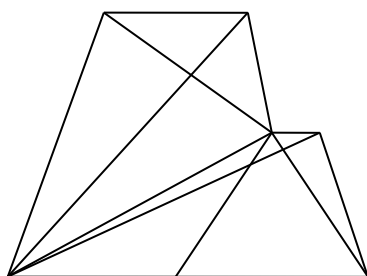
В этом пункте мы дадим определение понятия «площадь фигуры».

Отправной точкой считается понятие площадь треугольника. Это понятие считается известным. Для того, чтобы определить площадь многоугольника, разобьём его на треугольники, вычислим площади этих треугольников и просуммируем их. Следует доказать корректность этого определения. Это означает, что если разбить многоугольник на треугольники другим способом, то его площадь от этого не измениться. Докажем это.

Возьмем 2 разбиения многоугольника на треугольники:



Построим общее разбиение:



Получится разбиение
многоугольника, которые можно
«доразбить» до треугольников.

Тогда площади частей как 1-го, так и 2-го разбиения получаются, как суммы площадей маленьких треугольников из результирующего разбиения. Поэтому суммы частей 1-го и 2-го разбиения отличаются друг от друга только порядком и их величины одинаковы.

Площадь многоугольника обладает такими свойствами:

Площадь любого многоугольника неотрицательна;

Если A, B - многоугольники, то $\text{пл.}(A \cup B) = \text{пл.}(A) + \text{пл.}(B) - \text{пл.}(A \cap B)$, в частности, если $\text{пл.}(A \cap B) = 0$ то $\text{пл.}(A \cup B) = \text{пл.}(A) + \text{пл.}(B)$. Это свойство называется аддитивностью площади. Из него следует, что если $A \subset B$, то $\text{пл.}(A) \leq \text{пл.}(B)$.

Пусть теперь P - ограниченная плоская фигура. Рассмотрим множество $\{A\}$ многоугольников таких, что $A \subset P$ и множество $\{B\}$ многоугольников таких, что $P \subset B$. Множество площадей $\{\text{пл.}(A)\}$ многоугольников $A \subset P$ ограничено

сверху площадью любого многоугольника B такого, что $P \subset B$. Поэтому существует точная верхняя грань этого числового множества, $\sup_{A \subset P} \{пл.(A)\}$.

Аналогично, для множества площадей $\{пл.(B)\}$ многоугольников $B, P \subset B$, существует точная нижняя грань $\inf_{P \subset B} \{пл.(B)\}$.

Определение. Плоская фигура P называется **имеющей площадь** (**квадрируемым множеством**), если:

$$\sup_{A \subset P} \{пл.(A)\} = \inf_{P \subset B} \{пл.(B)\},$$

при этом общее значение этих величин называется её **площадью** $пл.(P)$.

Нетрудно заметить, что:

Площадь любой квадрируемой фигуры P неотрицательна, т.к., по определению $пл.(P) = \inf \{пл.(B)\}$, а все $пл.(B) \geq 0$.

Аддитивность площади, т.е. равенство $пл.(P_1 \cup P_2) = пл.(P_1) + пл.(P_2) - пл.(P_1 \cap P_2)$, также имеет место для квадрируемых фигур P_1, P_2 .

Достаточно доказать это равенство в случае, когда $пл.(P_1 \cap P_2) = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем многоугольники $A_i, B_i, i = 1, 2$, так, чтобы

$$A_i \subset P_i \subset B_i, пл.(P_i) - пл.(A_i) < \frac{\varepsilon}{4}, пл.(B_i) - пл.(P_i) < \frac{\varepsilon}{4}. \text{ Тогда}$$

$$A_1 \cup A_2 \subset P_1 \cup P_2 \subset B_1 \cup B_2 \text{ и } A_1 \cap A_2 \subset P_1 \cap P_2, \text{ откуда}$$

$$пл.(A_1 \cap A_2) \leq пл.(P_1 \cap P_2) = 0, \text{ т.е. } пл.(A_1 \cap A_2) = 0. \text{ Следовательно, пл.}$$

$$(A_1 \cup A_2) = пл.(A_1) + пл.(A_2) > пл.(P_1) + пл.(P_2) - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = пл.(P_1) + пл.(P_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$пл.(B_1 \cup B_2) \leq пл.(B_1) + пл.(B_2) < пл.(P_1) + пл.(P_2) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = пл.(P_1) + пл.(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому:

$$\text{пл.}(P_1) + \text{пл.}(P_2) - \frac{\varepsilon}{2} < \text{пл.}(A_1 \cup A_2) \leq \text{пл.}(B_1 \cup B_2) \leq \text{пл.}(B_1) + \text{пл.}(B_2) < \text{пл.}(P_1) + \text{пл.}(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, это означает, что $P_1 \cup P_2$ имеет площадь, и $\text{пл.}(P_1 \cup P_2) = \text{пл.}(P_1) + \text{пл.}(P_2)$, что и требовалось доказать.

Иногда оказывается полезным такое утверждение.

Теорема: Пусть P - плоская фигура, $\{R\}$ - множество квадратируемых фигур $R, R \subset P, \{Q\}$ - множество квадратируемых фигур $Q, P \subset Q$.

Если $\sup_{R \subset P} \{\text{пл.}(R)\} = \inf_{P \subset Q} \{\text{пл.}(Q)\}$, то P - квадратируемая фигура, причем её площадь равна общему значению этих величин.

Для доказательства достаточно для произвольного $\varepsilon > 0$ выбрать сначала квадратируемые фигуры R, Q так, чтобы $R \subset P \subset Q$ и $\text{пл.}(Q) - \text{пл.}(R) < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем выберем многоугольники $A \cup B, A \subset R \subset P \subset Q \subset B$ так, что

$$\text{пл.}(R) - \text{пл.}(A) < \frac{\varepsilon}{4}, \text{пл.}(B) - \text{пл.}(Q) < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ тогда } \text{пл.}(B) - \text{пл.}(A) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

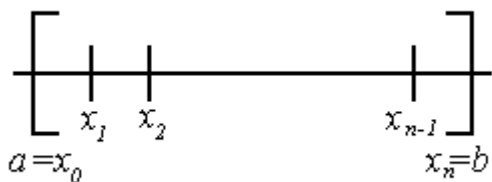
Таким образом, для фигуры P можно выбрать многоугольники A и B так, что $A \subset P \subset B$ и площади A и B столь угодно близки, что и означает квадратируемость P .

Определение интеграла

Для дальнейшего потребуется понятие разбиения отрезка.

Определение. Точки $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ задают разбиение отрезка $[a; b]$.

Для краткости будем обозначать разбиение буквой T .



Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$.

Определение. Наибольшее из чисел $\Delta x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ называется *диаметром* разбиения T и обозначается $d(T)$.

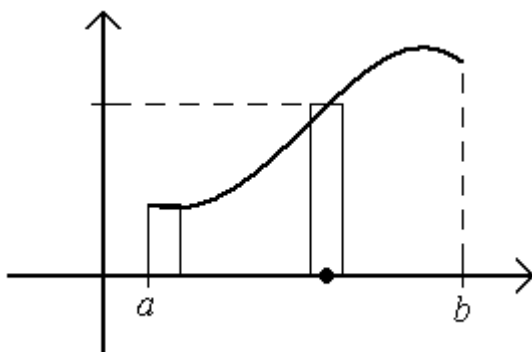
Определение. Если произвольным образом выбрать точки $\zeta_i, \zeta_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1$, то получится *разбиение T с отмеченными точками* $\zeta_i, i = 0, 1, \dots, n-1$.

Иногда, для краткости, будем обозначать набор точек $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ символом $\bar{\zeta}$.

Перейдем к основным определениям.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, и пусть задано разбиение T этого отрезка с отмеченными точками $\bar{\zeta}$. *Интегральной суммой* называется величина $\sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i) \Delta x_i$.

Для обозначения интегральной суммы будем использовать символ $\sigma(f(x), T, \bar{\zeta})$, или просто σ .



Для неотрицательной функции $f(x)$ интегральная сумма $\sigma(f(x), T, \bar{\zeta})$ представляет собой просто площадь ступенчатого многоугольника, составленного из прямоугольников с основаниями Δx_i , имеющих высоты, равные $f(\zeta_i)$.

Определение. Пусть существует число $I \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[a; b]$, удовлетворяющего условию $d(T) < \delta$, и для любого выбора точек $\bar{\zeta}$ выполняется

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Тогда функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$, а число I называется ее *интегралом* по отрезку $[a;b]$. Интеграл обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Интеграл – одно из важнейших понятий математического анализа, имеющее многочисленные приложения к практическим задачам.

Именно с помощью этого понятия удастся решить задачу о площади фигуры, ограниченной кривыми линиями.

Необходимое условие существования интеграла

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$.

Доказательство. Возьмем в определении интеграла $\varepsilon = 1$ и рассмотрим соответствующее ему δ . Пусть T – любое разбиение, удовлетворяющее условию $d(T) < \delta$. Для того, чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно доказать, что при всех $j, j = 0, 1, \dots, n-1$ функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[x_j; x_{j+1}]$, т.е. $|f(x)| \leq M_j$. Действительно, тогда для $M = \max(M_0, \dots, M_{n-1})$ имеем при $x \in [a;b]$: $|f(x)| \leq M$, т.к. x входит в некоторый отрезок $[x_j; x_{j+1}]$ и, значит $|f(x)| \leq M_j \leq M$.

Выберем любое $j, j = 0, 1, \dots, n-1$ и представим интегральную сумму $\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\})$

$$\text{в виде } \sum_{i=0}^{j-1} f(\xi_i) \Delta x_i + f(\xi_j) \Delta x_j + \sum_{i=j+1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

Зафиксируем произвольным образом числа $\xi_0, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{n-1}$ выбранные в соответствующих промежутках. При этом первое и третье слагаемые в равенстве (1) примут определенное фиксированное значение. Обозначим сумму этих слагаемых буквой J . Таким образом, при любом $\xi_j \in [x_j; x_{j+1}]$

$$\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) = J + f(\xi_j) \Delta x_j \quad (2)$$

По условию, функция интегрируема, значит $|\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) - I| < 1$, т.е.

$$-1 < \sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) - I < 1, \quad \text{или} \quad I - 1 < \sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) < I + 1. \text{Откуда, учитывая} \quad (2),$$

$$I - 1 < J + f(\xi_j)\Delta x_j < I + 1, \quad I - J - 1 < f(\xi_j)\Delta x_j < I - J + 1,$$

$$\frac{I - J - 1}{\Delta x_j} < f(\xi_j) < \frac{I - J + 1}{\Delta x_j} \quad (3)$$

Левая и правая части неравенств (3) представляют собой величины, не зависящие

от ξ_j . Поэтому неравенства (3) означают, что $|f(\xi_j)| < \max\left(\left|\frac{I - J - 1}{\Delta x_j}\right|, \left|\frac{I - J + 1}{\Delta x_j}\right|\right) = M_j$.

Теорема

доказана.

Билет 5: СУММЫ ДАРБУ И ИХ СВОЙСТВА

При исследовании вопроса о существовании интеграла важную роль играют суммы Дарбу (Г. Дарбу (1842–1917)).

По доказанной в пункте 4 билета 4 теореме $f(x)$ ограничена на $[a; b]$ и, следовательно, для любого разбиения T отрезка она ограничена на всех отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ (т.е. множество её значений на этом отрезке ограничено сверху и снизу).

Обозначим M_i – точную верхнюю грань, а m_i – точную нижнюю грань множества значений функции $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, n-1$.

Определение 5.1. Числа $S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ и $s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ называются,

соответственно, *верхней* и *нижней суммами Дарбу* функции $f(x)$ для разбиения T на отрезке $[a; b]$.

Теорема 5.1. *Верхняя сумма Дарбу $S(T)$ представляет собой точную верхнюю грань, а нижняя сумма Дарбу $s(T)$ – точную нижнюю грань множества*

значений интегральных сумм при заданном разбиении T и всевозможных выборах точек $\{\bar{\xi}\}$.

Доказательство. Проведем его для верхней суммы Дарбу. Для нижней суммы рассуждения вполне аналогичные.

Во-первых, для любого i и для любой точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ имеет место неравенство $f(\xi_i) \leq M_i$ (по определению M_i). Значит,

$$f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Суммируя неравенства (1) по всем $i = 0, 1, \dots, n-1$, получаем

$\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = S(T)$. То есть $S(T)$ — верхняя грань множества $\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\})$ по всевозможным выборам $\{\bar{\xi}\}$.

Осталось доказать, что $S(T)$ — точная верхняя грань. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку M_i — точная верхняя грань множества значений $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ существует точка $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ такая, что

$$f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{и}$$

$$f(\xi_i) \Delta x_i > M_i \Delta x_i - \frac{\varepsilon \Delta x_i}{b-a}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

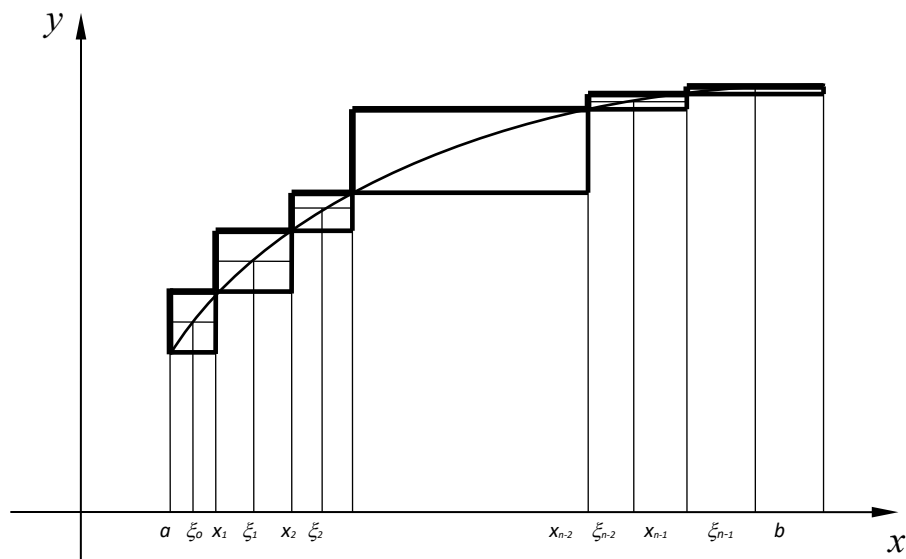
Суммируя неравенства (2) по $i = 0, 1, \dots, n-1$, получаем, что

$$\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i > \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon \Delta x_i}{b-a} = S(T) - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = S(T) - \varepsilon, \quad \text{т.к.}$$

$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b-a$ (суммарная длина отрезков, составляющих отрезок $[b-a]$, равна длине этого отрезка).

Итак, доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ можно так выбрать точки $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$, что $\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) > S(T) - \varepsilon$, что как раз и означает, что $S(T) = \sup \{\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\})\}$, где верхняя грань взята по всевозможным выборам точек $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$. Теорема доказана.

Замечание. Очевидны неравенства: $s(T) \leq \sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) \leq S(T)$.

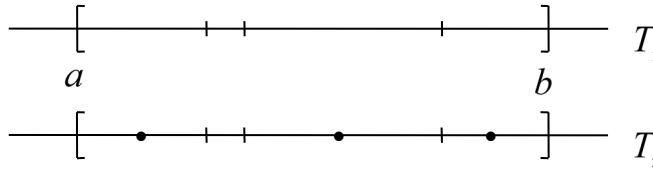


Заметим, что нижняя сумма Дарбу, соответствующая разбиению $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, представляет собой площадь многоугольника, верхняя граница которого на рисунке есть нижняя из 3 ломаных, отмечена жирной линией.

Верхняя сумма Дарбу — это площадь многоугольника, верхняя граница которого — верхняя из 3 ломаных линий, отмечена еще более жирной линией.

Наконец, интегральная сумма, соответствующая выбору точек $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ — это площадь многоугольника, верхняя граница которого на рисунке заключена между описанными выше линиями и изображена простой линией.

Определение 5.2. Разбиение T_2 отрезка $[a, b]$ называется *продолжением* разбиения T_1 (или *измельчением*), если оно получено присоединением к T_1 новых точек деления.



(круглыми точками отмечены новые точки деления).

Теорема 5.2.

1. Если T_2 продолжает T_1 , то $s(T_1) \leq s(T_2)$, $S(T_1) \geq S(T_2)$. (3)

2. Для любых разбиений T_1 и T_2 имеет место неравенство: $s(T_1) \leq S(T_2)$. (4)

Доказательство. Сначала докажем неравенства (3) в случае, когда T_2 получено присоединением к T_1 одной новой точки. Пусть эта точка, обозначим её x' , попала в интервал $x_i < x' < x_{i+1}$. Рассмотрим суммы Дарбу, соответствующие старому разбиению и новому разбиению.

Поскольку остальные отрезки старого разбиения остались без изменения, соответствующие им слагаемые сумм Дарбу не изменятся. Поэтому различие старой и новой суммы Дарбу только в том, что:

для верхней суммы Дарбу слагаемое $M_i \Delta x_i$ заменяется на сумму $M'_i(x' - x_i) + M''_i(x_{i+1} - x')$, где M'_i — точная верхняя грань множества значений $f(x)$ на $[x_i, x']$, M''_i — на $[x', x_{i+1}]$;

для нижней суммы Дарбу слагаемое $m_i \Delta x_i$ заменяется суммой $m'_i(x' - x_i) + m''_i(x_{i+1} - x')$, где m'_i , m''_i — соответствующие точные нижние грани.

Очевидны неравенства: $M'_i \leq M_i$, $M''_i \leq M_i$, $m'_i \geq m_i$, $m''_i \geq m_i$ (точная верхняя грань множества значений $f(x)$ на части отрезка не превосходит точной верхней грани множества значений $f(x)$ на всем отрезке, а точная нижняя грань множества значений $f(x)$ на части отрезка не меньше, чем точная нижняя грань

множества значений $f(x)$ на всем отрезке).

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } S(T_2) - S(T_1) &= M_i \Delta x_i - M'_i(x' - x_i) - M''_i(x_{i+1} - x') = \\ &= M_i[(x' - x_i) + (x_{i+1} - x')] - M'_i(x' - x_i) - M''_i(x_{i+1} - x') = \\ &= (M_i - M'_i)(x' - x_i) + (M_i - M''_i)(x_{i+1} - x') \geq 0, \end{aligned}$$

т.к. $M_i \geq M'_i$, $M_i \geq M''_i$, $x' > x_i$, $x_{i+1} > x'$.

$$\begin{aligned} \text{Аналогично, } s(T_2) - s(T_1) &= m'_i(x' - x_i) + m''_i(x_{i+1} - x') - m_i(x_{i+1} - x_i) = \\ &= m'_i(x' - x_i) + m''_i(x_{i+1} - x') - m_i[(x_{i+1} - x') + (x' - x_i)] = \\ &= (m'_i - m_i)(x' - x_i) + (m''_i - m_i)(x_{i+1} - x') \geq 0, \end{aligned}$$

т.к. $m'_i \geq m_i$, $m''_i \geq m_i$, $x' > x_i$, $x_{i+1} > x'$.

Итак, первое утверждение теоремы доказано в случае, когда T_2 получено из T_1 добавлением одной новой точки.

Если же таких новых точек — несколько, то мы можем рассматривать T_2 как результат последовательного присоединения по одной точке. При этом, по доказанному выше, при каждом таком присоединении точки верхняя сумма Дарбу не увеличивается. Значит, $S(T_2) \leq S(T_1)$ и в общем случае. Аналогичное рассуждение справедливо и для нижних сумм.

Поэтому первое утверждение теоремы доказано.

Докажем утверждение 2.

Неравенство (4) легко следует из первой части теоремы. Действительно, рассмотрим разбиение T_3 , которое получается, когда мы берем все точки, входящие в T_1 , и все точки, входящие в T_2 . Тогда T_3 — продолжение T_1 и T_2 . Но тогда $s(T_1) \leq s(T_3) \leq S(T_3) \leq S(T_2)$. Первое и последнее неравенства следуют из доказанной первой части теоремы, среднее неравенство очевидно.

**Билет 6. Критерий интегрируемости. Интегрируемость
монотонной функции. Интегрируемость непрерывной функции**

Теорема 6.1: *Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех разбиений T , удовлетворяющих условию $d(T) < \delta$, выполнялось неравенство*

$$S(T) - s(T) < \varepsilon \quad (1)$$

Доказательство. 1.Необходимость.

Для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ выберем δ так, чтобы $\forall T$ с условием $d(T) < \delta$ и $\forall \{\xi\}$ выполнялось неравенство $|\sigma(f, T, \{\xi\}) - I| < \varepsilon/3$, что можно сделать ввиду интегрируемости $f(x)$ на $[a;b]$. Тогда $-\varepsilon/3 < \sigma(f, T, \{\xi\}) - I < \varepsilon/3$, $I - \varepsilon/3 < \sigma(f, T, \{\xi\}) < \varepsilon/3 + I$ для любого выбора $\{\xi\}$. Значит, число $\varepsilon/3 + I$ — это верхняя грань множества значений $\{\sigma(f, T, \{\xi\})\}$ при всевозможных выборах точек $\{\xi\}$.

Значит, $S(T) \leq \varepsilon/3 + I$, поскольку по доказанной теореме 5.1, $S(T)$ — точная верхняя грань этого множества, а точная верхняя грань является наименьшей из верхних граней и не может превосходить числа $\varepsilon/3 + I$. Аналогично $s(T) \geq I - \varepsilon/3$. Поэтому $S(T) - s(T) \leq I + \varepsilon/3 - (I - \varepsilon/3) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$. Неравенство (1) доказано.

2. Достаточность. Поскольку для любых T_1, T_2 выполняется неравенство

$$s(T_1) \leq s(T_2), \quad (2)$$

множество $\{s(T)\}$ значений $s(T)$ при всевозможных разбиениях T отрезка $[a; b]$ ограничено сверху (любым числом вида $S(T)$). Аналогично, множество $\{S(T)\}$ ограничено снизу. Поэтому существуют $I_* = \sup\{s(T)\}$, $I^* = \inf\{S(T)\}$. Из неравенства (2) сразу следует, что $I^* - I_* \geq 0$.

Покажем сначала, что из (1) следует, что $I^* = I_*$. Действительно, $S(T) \geq I^*, s(T) \leq I_*$.

и, следовательно,

$$I^* - I_* \leq S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Значит, ввиду произвольности положительного числа ε , выполняется равенство $I^* = I_*$ (неотрицательное число, меньшее любого положительного числа – это 0).

Обозначим $I = I^* = I_*$.

Далее,

$$s(T) - S(T) \leq \sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) - I \leq S(T) - s(T),$$

или

$$|\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) - I| \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$$

согласно (1). Поэтому $f(x)$ - интегрируема на $[a; b]$. Теорема доказана.

Замечание 1. Часто используется обозначение $\omega_i = M_i - m_i$. Величину ω_i называют колебанием $f(x)$ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$.

Неравенство (1) можно переписать в виде $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

Замечание 2. В доказательстве теоремы установлены равенства $I = I^* = I_*$, означающие, что

$$\sup_T s(T) = \inf_T S(T) = \int_a^b f(x) dx,$$

где точная нижняя и верхняя грани взяты со всевозможными разбиениями T отрезка $[a; b]$.

Замечание 3. Докажем, что существует неинтегрируемые ограниченные функции. В качестве примера рассмотрим функцию Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

Для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ выполняются равенства:

$$S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

$$s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0,$$

поэтому для всех разбиений T имеем $S(T) - s(T) = b - a \neq 0$ и требование критерия интегрируемости не выполняется.

Простым следствием доказанного критерия является *интегрируемость монотонной функции*.

Теорема 6.2. Если $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ не убывает. Тогда на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ выполняются равенства: $m_i = f(x_i)$, $M_i = f(x_{i+1})$. Если $f(b) = f(a)$, то $f(x)$ - постоянная и ее интегрируемость очевидна ($S(T) = s(T)$). Если $f(b) > f(a)$, то положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \quad (5)$$

Тогда если $\Delta x_i < \delta$, то выполняются соотношения

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leq \delta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} M_i - m_i = \delta \sum f(x_{i+1}) - f(x_i) = \delta (f(x_n) - f(x_0)) = \delta (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

Интегрируемость непрерывной функции

Из критерия интегрируемости следует

Теорема 6.3. *Если $f(x) \in C[a; b]$, то $f(x)$ — интегрируема на $[a; b]$.*

Доказательство. По теореме Кантора, $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a; b]$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta \quad |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (1).$$

Рассмотрим разбиение T отрезка $[a; b]$ с диаметром меньшим, чем выбранное δ . Тогда на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеет место неравенство:

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (2).$$

Действительно, достаточно подобрать точку x' так, что

$$M_i - f(x') < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad (3)$$

и точку x'' так, чтобы

$$f(x'') - m_i < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad (4).$$

(Это можно сделать, т.к. числа M_i, m_i — точные грани множества значений функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$).

Тогда ввиду (1), (3), (4)

$$M_i - m_i = M_i - f(x') + f(x') - f(x'') + f(x'') - m_i$$

и

$$M_i - m_i \leq |M_i - f(x')| + |f(x') - f(x'')| + |f(x'') - m_i| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Неравенство (2) доказано. Тогда

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

То есть критерий интегрируемости из теоремы 6.1 выполняется.

Условие непрерывности функции является достаточным, но не необходимым для её интегрируемости. В частности, имеет место

Теорема 6.4. *Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.*

Ограничимся схемой доказательства.

Для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ полученные отрезки $[x_i; x_{i+1}]$ либо содержат точку разрыва, либо не содержат. Количество отрезков, куда может входить точка разрыва, не превосходит удвоенного числа точек разрыва, так как точка разрыва может принадлежать одному отрезку (когда она не совпадает с точкой деления), либо двум отрезкам (когда она совпадает с точкой деления). По условию, функция $f(x)$ ограничена, поэтому существуют точная нижняя грань m и точная верхняя грань M множества её значений. Следовательно, колебание ω_i на любом отрезке, содержащем точку разрыва, не превосходит $M - m$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $d(T)$ столь малым, чтобы сумма величин $\omega_i \Delta x_i$ для отрезков, содержащих точки разрыва, стала меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Так же, как при доказательстве теоремы об интегрируемости непрерывной функции, можно доказать, что сумма величин $\omega_i \Delta x_i$ для отрезков, не содержащих

точек разрыва, меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, при достаточно малых значениях $d(T)$. Но это означает, что при достаточно малых $d(T)$ вся сумма

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \quad \text{и теорема доказана.}$$

Билет 7. Свойства определённого интеграла

Распространим определение интеграла на случай $a > b$.

Определение. Если $a > b$, то по определению,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (1)$$

если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Также по определению положим

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (2)$$

Заметим, что равенство (1) справедливо и в случае $a < b$, так как тогда

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \text{ что равносильно равенству (1).}$$

Это замечание, вместе с определением (2), означает, что равенство (1) выполняется при всех a и b .

Теорема. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, $a < b$.

Тогда $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[c; d] \subset [a; b]$.

Доказательство.

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[c; d]$ и проведем разбиение оставшихся частей отрезка $[a; b]$.

В итоге будет получено разбиение T отрезка $[a; b]$, причем точки c и d войдут в число точек деления этого разбиения.

Рассмотрим сумму $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$, соответствующую разбиению T отрезка $[a; b]$ и выделим часть этой суммы $\sum' \omega_i \Delta x_i$, соответствующую тем отрезкам разбиения, которые входят в разбиение отрезка $[c; d]$.

Так как $\omega_i \geq 0$, $\Delta x_i > 0$, а сумма $\sum' \omega_i \Delta x_i$ является частью суммы $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$, очевидно неравенство $\sum' \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$.

Поскольку за счет выбора диаметра разбиения величину $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ можно сделать меньшей любого заданного $\varepsilon > 0$, то же верно и для $\sum' \omega_i \Delta x_i$, что означает интегрируемость $f(x)$ на $[c; d]$.

Теорема. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$ $a < c < b$.

Тогда она интегрируема и на отрезке $[a; b]$, причем

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

Доказательство.

По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для разбиения отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$ с диаметром меньшим δ , выполняются неравенства

$$\sum_{[a; c]} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{[c; b]} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Рассмотрим теперь произвольное разбиение T

отрезка $[a;b]$. Если точка c попала в число точек деления, то сумма $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i =$

$$\sum_{[a;c]} \omega_i \Delta x_i + \sum_{[c;b]} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Если же c не попала в число точек деления, то при некотором j , $0 \leq j \leq n-1$, $c \in [x_j; x_{j+1}]$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{j-1} \omega_i \Delta x_i + \omega_j \Delta x_j + \sum_{i=j+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \quad (4)$$

Обе суммы стоящие в правой части (4), не превосходят, соответственно,

$$\sum_{[a;c]} \omega_i \Delta x_i \text{ и } \sum_{[c;b]} \omega_i \Delta x_i.$$

Так как функция $f(x)$ ограничена на $[a;c]$ и $[c;b]$ она ограничена и на всем отрезке $[a;b]$. Пусть m и M соответственно, точная нижняя и точная

верхняя грани её значения. Поэтому

$$\omega_i \leq M - m.$$

Следовательно, при достаточно малом $d(T)$ все три величины $\sum_{[a,c]} \omega_i \Delta x_i$,

$\sum_{[c,b]} \omega_i \Delta x_i$ и $\omega_j \Delta x_j$ меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, поэтому и

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Таким образом, $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Равенство (3) сразу следует из равенства

$$\sum_{[a,c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a,b]} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (5),$$

в котором в левой части стоят интегральные суммы, соответствующие произвольным разбиениям отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, а в правой части – интегральная сумма, соответствующая разбиению отрезка $[a, b]$, среди точек деления которого есть точка c . При стремлении к 0 диаметра вышеупомянутого

разбиения отрезка $[a, b]$ обе суммы, стоящие в левой части равенства стремятся, соответственно, к интегралам $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, а так как мы доказали существование $\int_a^b f(x)dx$, то и правая часть равенства (5) стремиться к $\int_a^b f(x)dx$ ч.т.д.

Равенство (3) выражает свойство *аддитивности интеграла* по отрезку. Заметим, что это свойство, ввиду (1) останется верным при любом взаимном расположении a, b, c .

Свойство 1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то для любого числа k функция $kf(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (6)$$

Свойство 2. Если $f(x), g(x)$ - интегрируемы на $[a, b]$, то функция $f(x) + g(x)$ - интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (7)$$

Доказательство свойств.

Обозначим $S_f(T), S_g(T), s_f(T), s_g(T)$ суммы Дарбу для функций $f(x)$ и $g(x)$.

Поскольку

$$\sup \{kf(x)\} = k \sup \{f(x)\}, \quad \inf \{kf(x)\} = k \inf \{f(x)\},$$

имеет место неравенство

$$S_{kf}(T) - s_{kf}(T) < \frac{\varepsilon}{k},$$

справедливое при $d(T) < \delta$ ввиду интегрируемости функции $f(x)$.

Далее,

$$\sup \{f(x) + g(x)\} \leq \sup \{f(x)\} + \sup \{g(x)\},$$

$$\inf\{f(x) + g(x)\} \geq \inf\{f(x)\} + \inf\{g(x)\}.$$

Поэтому, при условии выполнения неравенств

$$S_f(T) - s_f(T) < \frac{\varepsilon}{2}, S_g(T) - s_g(T) < \frac{\varepsilon}{2}$$

имеем:

$$S_{f+g}(T) - s_{f+g}(T) \leq S_f(T) - s_f(T) + S_g(T) - s_g(T) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, интегрируемость в свойствах 1 и 2 доказана. Равенства (6) и (7) следуют теперь при стремлении $d(T)$ к 0 из равенств: $\sigma(kf, T, \{\bar{\xi}\}) = k\sigma(f, T, \{\bar{\xi}\})$ и $\sigma(f + g, T, \{\bar{\xi}\}) = \sigma(f, T, \{\bar{\xi}\}) + \sigma(g, T, \{\bar{\xi}\})$, очевидных для интегральных сумм.

Свойство 3. Если $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$ ($a < b$), и $f(x)$ – интегрируема на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Доказательство. По условию, для любого разбиения T отрезка и любого выбора точек ξ , выполняется неравенство $\sigma(f, T, \{\xi\}) \geq 0$. Поэтому $s(T) \geq 0, S(T) \geq 0$ и, т. к. $s(T) \leq I \leq S(T)$, тоже $I \geq 0$.

Свойство 4. Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ ($a < b$) и для всех $x \in [a; b]$ имеет место неравенство $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{8}$$

Доказательство. По свойствам 2 и 3 функция $f(x) - g(x)$ интегрируема. По свойству 3,

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0. \tag{9}$$

Вновь по свойствам 2 и 3,

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Поэтому из (9) следует (8).

Свойство 5. Пусть $f(x)$ – интегрируема на $[a; b]$ и $a < b$. Тогда $|f(x)|$ – интегрируема на $[a; b]$ и

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (10)$$

Доказательство. Известно, что для всех A, B $|A - B| \geq ||A| - |B||$. Значит, $\forall x', x''$

$||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$. Из этого следует, что ω_i^* – колебание функции $|f(x)|$ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ не превосходит колебания ω_i функции $f(x)$ на $[x_i; x_{i+1}]$. Значит, $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^* \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ при достаточно малом $d(T)$. Это

доказывает интегрируемость функции $|f(x)|$.

Наконец,

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \Delta x_i \quad (11)$$

(т. к. $|A_0 + \dots + A_{n-1}| \leq |A_0| + \dots + |A_{n-1}|$ для любых чисел $A_0, \dots, A_{n-1}$).

Из (11) при $d(T) \rightarrow 0$ следует (10).

Замечание. Из того, что $|f(x)|$ интегрируема на $[a; b]$ не следует, что $f(x)$ – интегрируема на $[a; b]$.

Пример. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число} \\ -1, & \text{если } x - \text{иррациональное число} \end{cases}$

Тогда $S(T) - s(T) = 2(b - a) > 0$, а $|f(x)| \equiv 1$ – очевидно, интегрируемая функция.

Свойство 6. Пусть $f(x)$ – интегрируема на $[a; b]$, $a < b$ и пусть при $x \in [a; b]$ выполнены неравенства $m \leq f(x) \leq M$. Тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Это сразу следует из свойства 5 и того, что для любой постоянной c имеет место очевидное равенство $\int_a^b cdx = c(b-a)$.

Билет 8. Теоремы о среднем. Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определённых интегралов

Теорема. (Теорема о среднем значении). Пусть $f(x)$ – интегрируема на $[a; b]$, $a < b$ и при $x \in [a; b]$ выполняются неравенства $m \leq f(x) \leq M$. Тогда существует число μ , $m \leq \mu \leq M$ такое, что $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. Если, кроме того, $f(x) \in C([a; b])$, то существует $\xi \in [a; b] : \mu = f(\xi)$, т. е. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из свойства 7.

Действительно $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \leq M$. Обозначив $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$, получаем

требуемое утверждение.

Если же $f(x)$ – непрерывна, то она принимает все свои промежуточные значения между наименьшим m_0 и наибольшим M_0 значениями на отрезке $[a; b]$.

При этом $m_0(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M_0(b-a)$ и $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, где $m_0 \leq \mu \leq M_0$.

Ввиду непрерывности $f(x)$ на $[a; b]$, как отмечено выше, $\mu = f(\xi)$, $\xi \in [a; b]$.

Теорема. (Обобщенная теорема о среднем значении). Пусть:

1. $g(x)$, $g(x) \cdot f(x)$ – интегрируемы на $[a; b]$;

2. $m \leq f(x) \leq M$;
3. $g(x)$ не меняет знак на $[a; b]$.

Тогда существует μ , $m \leq \mu \leq M$ такое, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$. Если, при

этом, $f(x)$ – непрерывна на $[a; b]$, то существует $\xi \in [a; b] : \mu = f(\xi)$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $g(x) \geq 0$ на $[a; b]$, $a < b$.

Тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \text{ и } m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx. \quad (1)$$

По свойству 4 $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Если оказалось, что $\int_a^b g(x)dx = 0$, то из (1) следует,

что $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и теорема справедлива при любом значении μ .

Определённый интеграл с переменным верхним пределом

Пусть $f(t)$ интегрируема на $[a; b]$. Тогда, по свойству 1 предыдущего параграфа, $f(t)$ интегрируема на $[a; x]$ при любом $x \in [a; b]$.

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$

Теорема 1. Если $f(t)$ – интегрируема на $[a; x]$ при любом $x \in [a; b]$, то $\Phi(x) \in C([a; b])$.

Доказательство. Достаточно доказать, что при $\Delta x \rightarrow 0$ имеем:

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \rightarrow 0 \text{ (при этом предполагается, что } x, x + \Delta x \in [a; b]).$$

По определению (1)

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu \Delta x,$$

согласно теореме о среднем (при этом $m \leq \mu \leq M$, где $m = \inf_{[a; b]} \{f(x)\}$,

$M = \sup_{[a; b]} \{f(x)\}$). При $\Delta x \rightarrow 0$ очевидно, что $\mu \Delta x \rightarrow 0$ и теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и непрерывна в точке $x \in [a; b]$. Тогда $\Phi(x)$ имеет производную в точке x , причём $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство.

$$\left| \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} - f(x) \right| = \frac{\left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - f(x) \Delta x \right|}{\Delta x} = \frac{\left| \int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x)) dx \right|}{\Delta x} \leq \frac{\int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dx}{\Delta x}.$$

По условию, $f(x)$ непрерывна в точке x , следовательно, $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, как только $|t - x| < \delta$. Но $|t - x| < \Delta x$. Значит, при $\Delta x < \delta$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} - f(x) \right| < \frac{\varepsilon \Delta x}{\Delta x} = \varepsilon, \text{ что как раз и означает, что } \Phi'(x) = f(x).$$

Определение. Если для всех $x \in (a; b)$ справедливо равенство $\Phi'(x) = f(x)$ то $\Phi(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на $(a; b)$.

Можно рассматривать первообразную и на отрезке $[a; b]$, тогда в точке a должно выполняться равенство $\Phi'_{\text{прав}}(a) = f(a)$, а в точке b – равенство $\Phi'_{\text{лев}}(b) = f(b)$.

Следствие. Если $f(x) \in C([a; b])$, то $\Phi'(x) = f(x)$ и $\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Замечание. Пример $f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$, $\Phi(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ показывает, что $\Phi'(0) = f(0)$ (т. е. $\Phi(x) \equiv 0$), т.е. $\Phi'(0) \neq f(0) = 1$, поэтому в случае точки разрыва утверждение теоремы может оказаться неверным.

Теорема 3. (Основная формула интегрального исчисления, часто называемая: формула Ньютона-Лейбница). Если $f(x) \in C([a; b])$, то для любой первообразной $F(x)$ имеет место равенство $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. По доказанному следствию, первообразная $\Phi(x)$ существует. Если $F(x)$ – любая другая первообразная, то существует $C = \text{const}$ такая, что $\Phi(x) - F(x) = C$, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a), \text{ что и требовалось доказать.}$$

Приёмы вычисления определённых интегралов

Теорема. (Замена переменной). Пусть $f(x) \in C([a, b])$ и $x = \phi(t)$, где:

1. $\phi(t)$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$;

2. значения $\phi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ не выходят за пределы отрезка $[a, b]$;
3. $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$;
4. $\phi'(t) \in C([\alpha, \beta])$.

Тогда
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Тогда $[F(\phi(t))]' = F'(x) \cdot \phi'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t)$. Поэтому выполняются равенства: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a)$ и требуемое равенство (1) установлено.

Теорема. (Интегрирование по частям). Пусть $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Поскольку $u'(x)v(x)$ — непрерывная функция, то существует её первообразная $\Psi(x)$, т.е. $u'(x)v(x) = \Psi'(x)$. Тогда $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - \Psi'(x)$ и
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b ((u(x)v(x))' - \Psi'(x))dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \Psi(x)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b \Psi'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$
 Теорема доказана.

Билет 9. Приложения интеграла: площадь фигуры, площадь
в полярных координатах, объём тела

Вернёмся к поставленной задаче нахождения площади фигуры, ограниченной кривыми линиями.

Теорема 9.1. Пусть P — фигура, ограниченная снизу осью x , по бокам — отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$, ($a < b$), а сверху — графиком непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ (см. рис.1). Тогда P имеет площадь, причем

$$\text{пл. } (P) = \int_a^b f(x) dx.$$

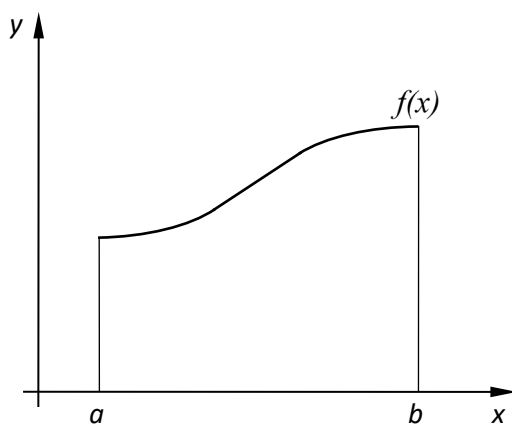


Рис. 1.

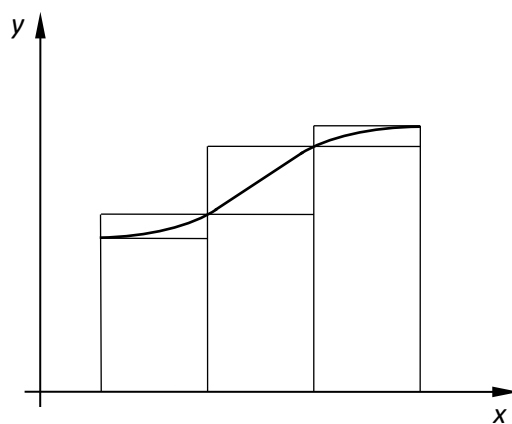


Рис. 2.

Доказательство. Для произвольного разбиения T отрезка $[a; b]$ нижняя сумма Дарбу $s(T)$ представляет собой площадь многоугольника A , $A \subset P$, а верхняя сумма Дарбу — площадь многоугольника B , $B \supset P$ (рис. 2). Так как $f(x)$

непрерывна на $[a; b]$, она интегрируема на этом отрезке и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений T с диаметром $d(T) < \delta$ имеет место неравенство $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существуют многоугольники $A \subset P \subset B$ такие, что $\text{пл.}(B) - \text{пл.}(A) < \varepsilon$. Это означает квадратуемость P . Наконец, площадь P равна $\sup_{A \subset P} \{\text{пл.}(A)\} = \inf_{P \subset B} \{\text{пл.}(B)\}$ и

$\inf_T S(T) = \sup_T s(T) = \int_a^b f(x) dx$. Эти равенства означают, что

$$\text{пл.}(P) = \int_a^b f(x) dx.$$

Следствие. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные на $[a; b]$ функции, причем для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f_1(x) \leq f_2(x)$. Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f_2(x)$, снизу — графиком функции $y = f_1(x)$, а по бокам — отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 3) равна

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

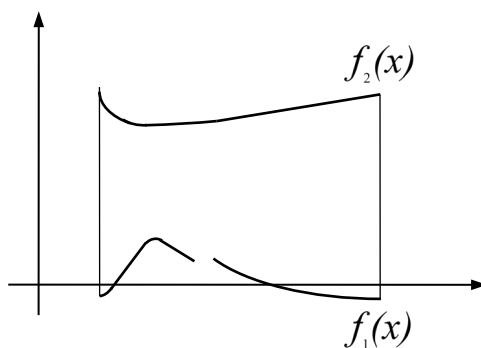
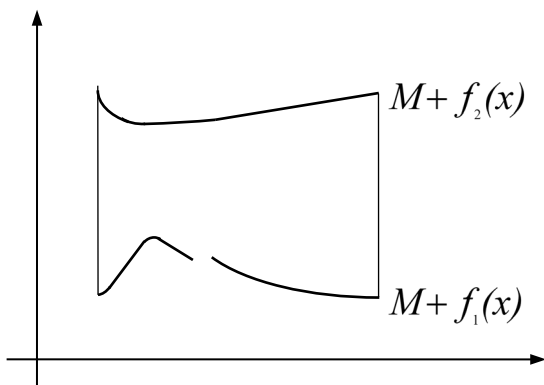


Рис. 3.

Доказательство. Т.к. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на $[a; b]$, они ограничены на этом отрезке. Поэтому существует число M такое, что $M + f_1(x) \geq 0$.

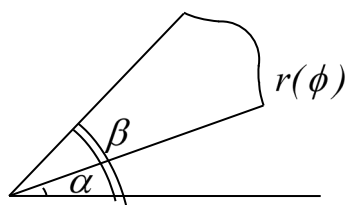


Тогда площадь рассматриваемой фигуры есть разность площадей криволинейных трапеций, и она есть

$$\begin{aligned} \int_a^b [M + f_2(x)] dx - \int_a^b [M + f_1(x)] dx &= \\ = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 9.2. (Площадь в полярных координатах).

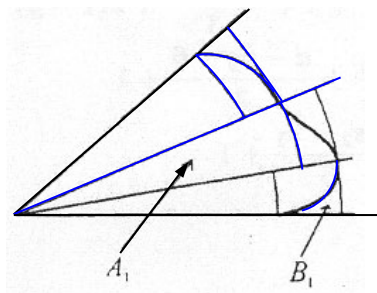


Пусть фигура представляет собой часть угла: $\alpha \leq \phi \leq \beta$, ограниченную графиком $r = r(\phi)$, $r(\phi)$ — непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция. Тогда

$$\text{пл.}(P) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\phi) d\phi.$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ и соответствующие ему нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для интеграла из формулировки теоремы.

По известной из школьного курса формуле для площади кругового сектора, эти суммы представляют собой площади фигур $A_1 \subset P \subset B_1$.



При измельчении разбиения эти суммы $\left(\sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 \frac{\Delta\phi_i}{2} \right.$ и $\left. \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 \frac{\Delta\phi_i}{2} \right.$, где $m_i = \min_{\phi \in [\phi_{i-1}, \phi_i]} r(\phi)$, $M_i = \max_{\phi \in [\phi_{i-1}, \phi_i]} r(\phi)$ стремятся к общему значению: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\phi) d\phi$, которое и равно искомой величине площади, поскольку A_1 и B_1 — квадратуемые фигуры.

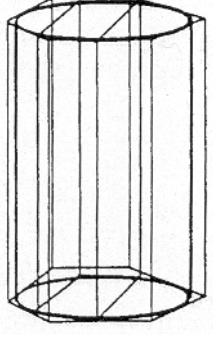
Объем тела

Определение объема можно дать вполне аналогичным определению площади образом. Именно, считая известным понятие объема многогранника, рассмотреть множество объемов содержащихся в данном теле многогранников и множество объемов содержащих данное тело многогранников. Если точная верхняя грань первого из рассматриваемых множеств равно точной нижней грани второго, то тело называется *кубируемым*, или имеющим объем, равный общему значению этих точных граней.

Теорема 9.3. *Если T представляет собой прямой цилиндр высоты H , в основании которого лежит квадратуемая фигура P с площадью $S(P)$, то*

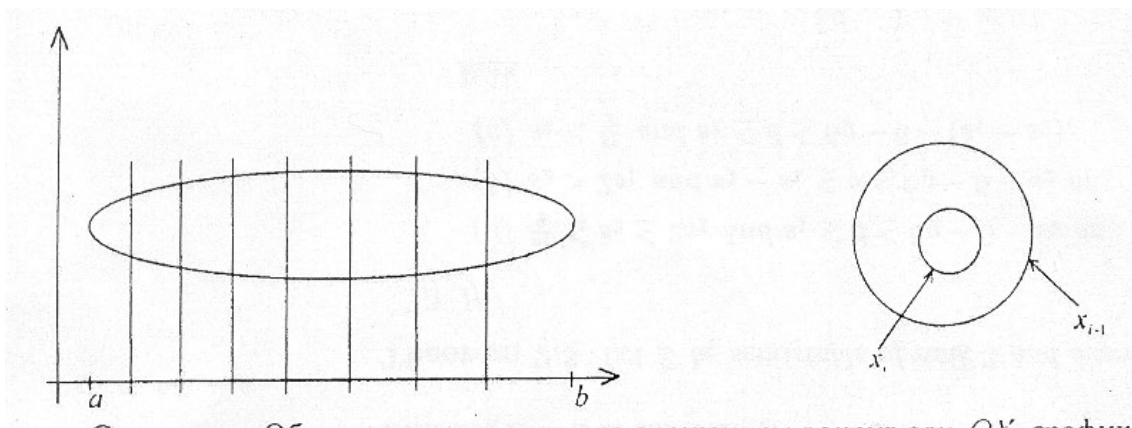
T — кубируема, причем $V(T) = S(P) \cdot H$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим многоугольники $A \subset P \subset B$ такие, что $S(B) - S(A) < \frac{\varepsilon}{H}$.

	Построим содержащийся в T и содержащий T многогранники высотой H, в основании которых лежат, соответственно, A и B. Тогда объемы этих многогранников отличаются на $H(S(B) - S(A)) < H \cdot \frac{\varepsilon}{H} = \varepsilon.$ Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, теорема доказана.
---	---

Теорема 9.4. Пусть T — пространственное тело, а оси расположены так, что любое сечение, перпендикулярное оси x этого тела, представляет собой квадратуемую фигуру с площадью $S(x)$, $a \leq x \leq b$, причем для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ проекция одного из сечений на плоскость OYZ целиком содержится в проекции другого сечения. Тогда T — кубируемое тело, и $V(T) = \int_a^b S(x) dx$.

Доказательство. Для произвольного разбиения отрезка $[a, b]$ суммы Дарбу представляют собой объемы тел, содержащихся внутри T (нижняя сумма Дарбу) и содержащих T (верхняя сумма Дарбу). Поскольку $S(x)$ интегрируема, при измельчении разбиения разность между верхней и нижней суммой Дарбу стремится к нулю. Это означает, что T имеет объем, причем $V(T) = \int_a^b S(x) dx$.

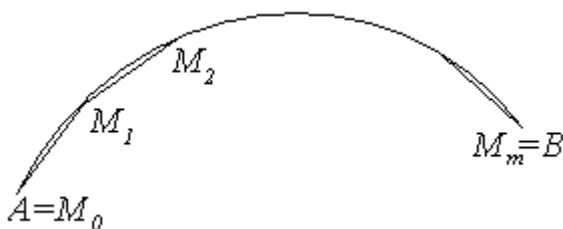


Следствие. Объем тела, полученного вращением вокруг оси OX графика функции $y = f(x)$ равен $V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Доказательство. Площадь круга радиуса $f(x)$ равна $\pi \cdot f^2(x)$.

Билет 10. ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА: длина дуги кривой, площадь поверхности вращения

Пусть незамкнутая, не имеющая точек самопересечения кривая задана параметрическим уравнением $x = x(t), y = y(t)$, $T_0 \leq t \leq T_1$, причем $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ непрерывны на $[T_0, T_1]$.



Пусть M_i имеет координаты $x(t_i), y(t_i)$.
 $t_0 = T_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T_1$. Рассмотрим ломаные линии, соединяющие выбранные вышеуказанным способом точки. Будем

их называть вписанными в кривую.

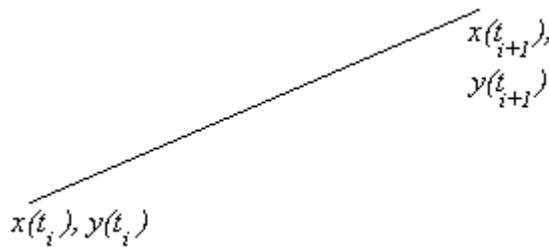
Определение. Если существует предел длины вписанной в кривую ломаной при стремлении к 0 максимальной длины звена ломаной, то этот предел называется длиной дуги кривой (а кривая называется *спрямляемой* или имеющей длину).

Теорема. При сформулированных выше условиях (т. е. если кривая незамкнутая и без точек самопересечения, причем ее параметризация $x = x(t), y = y(t)$ задается непрерывно дифференцируемыми функциями от t)

кривая имеет длину
$$l = \int_{T_0}^{T_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Доказательство. Рассмотрим вписанную ломаную и соответствующие ей точки деления отрезка $[T_0, T_1]$. Длина ломаной равна

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$
 (под знаком суммы стоит длина i -ого звена).



Применим к каждой из разностей $x(t_{i+1}) - x(t_i)$ и $y(t_{i+1}) - y(t_i)$ теорему Лагранжа, согласно которой $x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\xi_i)\Delta t_i$, $y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\eta_i)\Delta t_i$, где точки ξ_i и η_i лежат на интервале

(t_i, t_{i+1}) . Поэтому длина вышеупомянутой ломаной есть

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} \Delta t_i = \rho. \quad (1)$$

Эта величина напоминает соответствующую интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \Delta t_i = \sigma \quad (2)$$

(различие только в том, что в (1) стоят точки ξ_i, η_i , в (2) – только ξ_i).

Требуется доказать, что при стремлении к 0 максимальной длины звена ломаной линии разность величин ρ и σ стремится к 0.

Можно доказать (но мы это оставим без строгого доказательства), что стремление к 0 максимальной длины звена ломаной эквивалентно стремлению к 0 диаметров соответствующих разбиений отрезка $[T_0, T_1]$.

Итак, будем доказывать, что при $d(T) \rightarrow 0$ и $|\rho - \sigma| \rightarrow 0$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} |\rho - \sigma| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \right) \Delta t_i \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \right| \Delta t_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)|. \end{aligned} \quad (3)$$

Последний переход сделан на основании элементарного неравенства

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} \right| &= \frac{|b^2 - b_1^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} = \frac{|b + b_1|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} |b - b_1| \leq \\ &\leq \frac{|b| + |b_1|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} |b - b_1| \leq |b - b_1|, \text{ т. к. } \sqrt{a^2 + b^2} \geq |b|, \sqrt{a^2 + b_1^2} \geq |b_1|. \end{aligned}$$

По условию, функция y' непрерывна на $[T_0, T_1]$, следовательно, по теореме Кантора, y' равномерно непрерывна на $[T_0, T_1]$, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[T_0, T_1]$ с условием $\max |\Delta t_i| < \delta$ для всех $i = 0, \dots, n - 1$ выполняются неравенства

$$|y'(\xi_i) - y'(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Из этих неравенств следует, что $|\rho - \sigma| < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \Delta t_i = \varepsilon$.

Поскольку интегральные суммы стремятся к $\int_{T_0}^{T_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ при $\max |\Delta t_i| \rightarrow 0$, существует предел длины ломаных, причем этот предел равен указанному интегралу, и теорема доказана.

Следствие 1. Если кривая задана явным уравнением $y = f(x), x \in [a, b]$, то формула принимает вид $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Доказательство. Сводим к предыдущему случаю: $x = x, y = f(x)$.

Следствие 2. Если кривая задана полярным уравнением $r = r(\phi), \phi \in [\alpha, \beta]$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\phi) + (r'(\phi))^2} d\phi.$$

Доказательство. Положим $x = r(\phi) \cos \phi, y = r(\phi) \sin \phi$. Тогда
 $x' = r'(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi, y' = r'(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi, (x')^2 + (y')^2 = (r'(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi)^2 +$
 $+ (r'(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi)^2 = (r'(\phi))^2 \cos^2 \phi - 2r'(\phi)r(\phi) \cos \phi \sin \phi + r^2(\phi) \sin^2 \phi +$
 $+ (r'(\phi))^2 \sin^2 \phi + 2r'(\phi)r(\phi) \cos \phi \sin \phi + r^2(\phi) \cos^2 \phi = (r'(\phi))^2 + (r(\phi))^2$, и можно применить формулу из доказанной теоремы.

Примечание. В случае трехмерной кривой $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [T_0, T_1]$, где x, y, z — непрерывно дифференцируемые функции,

$$l = \int_{T_0}^{T_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Площадь поверхности вращения

Пусть $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \tau_0 < t < \tau_1$ — незамкнутая кривая, x, y, x', y' — непрерывные функции.

Вращаем кривую вокруг оси Ox . При этом получается поверхность вращения. Не входя в детали определения площади поверхности в общем случае — это будет сделано в курсе 4-ого семестра, и считая, что площадь поверхности вращения существует и обладает свойством аддитивности, укажем формулу для

ее вычисления: $S = 2\pi \int_{\tau_0}^{\tau_1} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. Действительно,

считая поверхность вращения малого участка кривой вокруг оси Ox близкой к части поверхности усеченного конуса с основаниями $y(t_i), y(t_{i+1})$ и

длиной образующей $\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2}$ (как и в теореме о длине дуги),

получим, что $\Delta S_i \cong 2\pi \frac{y(t_i) + y(t_{i+1})}{2} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_{i+1}))^2} \Delta t_i$. Суммируя и переходя к пределу при $\Delta t_i \rightarrow 0$, получаем требуемое.

Билет 11. Несобственные интегралы и обобщение понятия площади плоской фигуры. Сходимость интегралов $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$.

Критерии существования несобственных интегралов

Предположим, что для всех $b \in [a, +\infty)$ существует $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Если существует $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = I$, то этот предел называется *несобственным интегралом*

$f(x)$ от a до $+\infty$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (1).

Говорят еще, что интеграл (1) *сходится*.

Аналогично, пусть для всех $b \in [a; \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ существует $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Если существует $\lim_{b \rightarrow \omega-0} F(b) = I$, то этот предел называется *несобственным интегралом*

$f(x)$ от a до ω и обозначается $\int_a^{\omega} f(x)dx$ (2).

Часто мы будем использовать символ $\int_a^{\omega} f(x)dx$ для обозначения интегралов как вида (2) так и вида (1), допуская случай $\omega = \infty$.

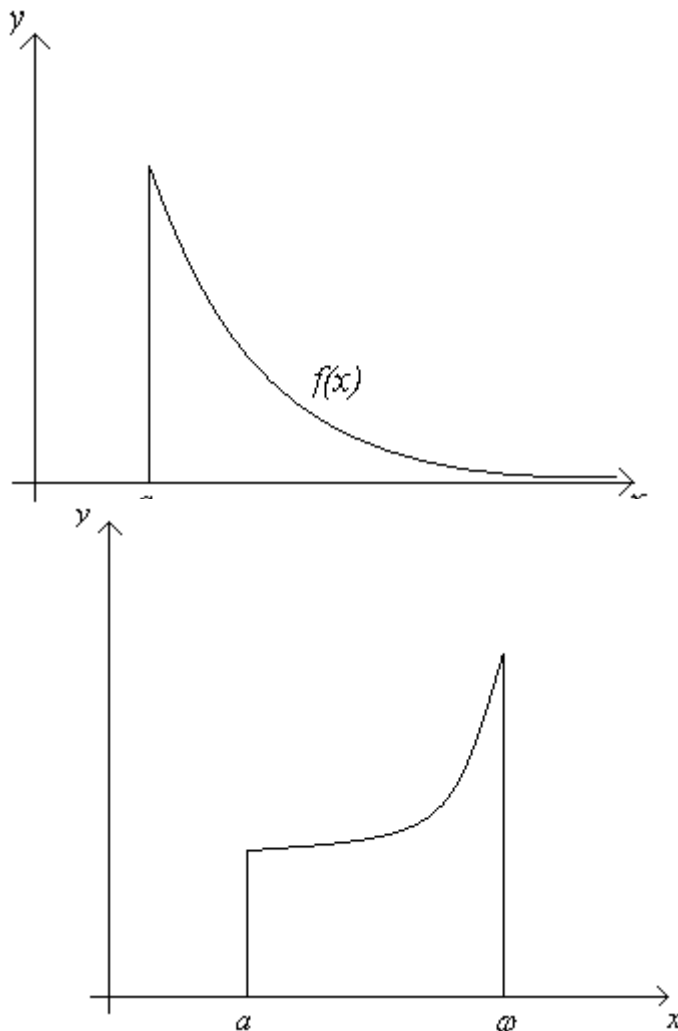
Отметим, что если $f(x)$ просто интегрируема на отрезке $[a; \omega]$, то ввиду непрерывности интеграла с переменным верхним пределом понятие

несобственного интеграла совпадает с обычным интегралом. Но бывает и так, что в обычном смысле интеграл не существует, а в несобственном – существует.

Понятие несобственного интеграла позволяет обобщить понятие площади на случай неограниченных фигур.

Именно, можно считать величину интеграла $\int_a^{\omega} f(x)dx$ площадью фигуры под графиком $y = f(x)$, если рассматриваемый интеграл сходится.

Аналогично, площадь такой фигуры можно выразить интегралом $\int_a^{\omega} f(x)dx$, если он сходится.



Выясним, когда сходится $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $a > 0$ (3).

Известно, что $\int \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p} + C, p \neq 1 \\ \ln x + C, p = 1 \end{cases}$. Поэтому при $p > 1$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} b^{1-p} - \frac{1}{1-p} a^{1-p} \right) = -\frac{1}{1-p} a^{1-p}, \text{ т.к. } b^{1-p} \rightarrow 0 \text{ при } b \rightarrow +\infty. \text{ При } p = 1$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \frac{b}{a} = +\infty \text{ и при } p < 1 \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} b^{1-p} - \frac{1}{1-p} a^{1-p} \right) = +\infty, \text{ т. к.}$$

$b^{1-p} \rightarrow +\infty$. То есть интеграл (3) сходится при $p > 1$ и расходится при остальных значениях p .

$$\text{Аналогичные рассуждения проведем для } \int_0^1 \frac{dx}{x^q} \quad (4).$$

При $q \leq 0$ это – обычный интеграл. При $q > 0$ этот интеграл не может существовать в собственном смысле, так как $\frac{1}{x^q}$ не ограничена в окрестности

$$x = 0. \text{ Далее, при } q \neq 1 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^q} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{\varepsilon^{1-q}}{1-q} \right) = \begin{cases} +\infty, q > 1 \\ \frac{1}{1-q}, q < 1 \end{cases}, \text{ а при } q = 1 \text{ имеем}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-\ln \varepsilon) = +\infty. \text{ Значит, интеграл (4) расходится при } q \geq 1, \text{ сходится при}$$

$0 < q < 1$, а при $q \leq 0$ это – обычный интеграл..

Часто бывает важно установить не само значение интеграла, а только сходится он или нет.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Теорема. Пусть для всех $b \in [a, \omega)$ существует $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Интеграл $\int_a^{\omega} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B = B(\varepsilon)$ такое, что для всех $b_1, b_2 > B$ выполняется неравенство $|F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$.

Доказательство этой теоремы состоит в применении критерия Коши существования предела к функции $F(b)$.

Отметим, что в этой теореме может быть как $\omega \in \mathbb{R}$, так и $\omega = \infty$.

Критерий сходимости интеграла от неотрицательной функции

Теорема. Пусть для всех $b \in [a, \omega)$ существует $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ и для всех $x \in [a, \omega)$ выполнено неравенство $f(x) \geq 0$. Интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует постоянная C такая, что для всех $b \in [a, \omega)$ выполнено неравенство $F(b) \leq C$.

Доказательство. Для неотрицательной функции $f(x)$ интеграл $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ есть неубывающая функция от b . Поэтому, используя теорему Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной функции получаем, что сходимость такого интеграла равносильна ограниченности всех значений $F(b)$, $b < \omega$, в совокупности. (Здесь ω используется как для обозначения $\omega \in \mathbb{R}$, так и для обозначения бесконечно удаленной точки $\omega = \infty$).

Билет 12. Теоремы о сравнении для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Абсолютно сходящиеся интегралы. Условно сходящиеся интегралы

Критерий сходимости интеграла от неотрицательной функции позволяет доказать простые, но очень важные теоремы о сравнении.

Теорема 1. Пусть $f_1(x), f_2(x)$ определены и интегрируемы в обычном смысле на любом $[a; b)$, где $b < \omega$ (отметим, что может быть как $\omega \in \mathbb{R}$, так и $\omega = \infty$). Пусть при $a \leq a_0 < \omega$ выполняется неравенство $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$. Тогда если сходится $\int_a^\omega f_2(x)dx$, то сходится и $\int_a^\omega f_1(x)dx$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что сходимость интеграла $\int_a^{\omega} f(x)dx$

равносильна сходимости интеграла $\int_{a_0}^{\omega} f(x)dx$, поскольку эти величины отличаются

лишь постоянным слагаемым $\int_a^{a_0} f(x)dx$.

Далее, $\forall b$ выполнено неравенство

$$\int_{a_0}^b f_1(x)dx \leq \int_{a_0}^b f_2(x)dx, \text{ или } F_1(b) \leq F_2(b).$$

По доказанному выше, сходимость $\int_{a_0}^{\omega} f_2(x)dx$ равносильна ограниченности

величины $F_2(b) = \int_{a_0}^b f_2(x)dx$. Значит, $\exists C : \forall b \quad F_2(b) \leq C$. Но тогда и $F_1(b) \leq F_2(b) \leq C$, то

есть $\exists C : \forall b \quad F_1(b) \leq C$ ограничена и, значит, $\int_{a_0}^{\omega} f_1(x)dx$ сходится.

Примечание. Эта теорема равносильна такой: при выполнении остальных условий теоремы, если $\int_a^{\omega} f_1(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^{\omega} f_2(x)dx$.

Действительно, если бы $\int_a^{\omega} f_2(x)dx$ сходилась, то по теореме 1 сходилась бы и

$$\int_a^{\omega} f_1(x)dx.$$

Теорема 2. Пусть при $a \leq x < \omega$ выполнены неравенства

$$f_1(x) \geq 0, f_2(x) > 0$$

и пусть $\exists \lim_{x \rightarrow \omega-0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = k \neq 0$, где $f_1(x), f_2(x)$, как обычно, определены и интегрируемы в обычном смысле на любом отрезке $[a; b]$, где $b < \omega$. Тогда либо оба интеграла $\int_a^{\omega} f_1(x) dx, \int_a^{\omega} f_2(x) dx$ сходятся, либо оба они расходятся.

Доказательство. Очевидно, что $k > 0$ (т.к. то, что $k \geq 0$ следует из свойств предела, и $k \neq 0$ по условию). Тогда для $\varepsilon = \frac{k}{2}$, используя определение предела, получаем, что существует окрестность точки ω такая, что в ней выполнено неравенство $\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - k \right| < \frac{k}{2}$, или $\frac{k}{2} < \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < \frac{3k}{2}$, или, так как $f_2(x) > 0$, неравенства $\frac{k}{2} f_2(x) < f_1(x) < \frac{3k}{2} f_2(x)$. Далее, если сходится $\int_a^{\omega} f_1(x) dx$, то, по первой теореме, сходится $\int_a^{\omega} \frac{k}{2} f_2(x) dx$ и, значит, $\int_a^{\omega} f_2(x) dx$. Если сходится $\int_a^{\omega} f_2(x) dx$, то сходится $\int_a^{\omega} \frac{3k}{2} f_2(x) dx$ и, значит, $\int_a^{\omega} f_1(x) dx$. Теорема доказана.

Пример. Доказать, что интеграл $\int_1^{\infty} \ln(1 + \sin \frac{1}{x^2}) dx$ сходится.

Доказательство. $0 < \frac{1}{x^2} \leq 1$, значит, $\sin \frac{1}{x^2} > 0$ и $\ln\left(1 + \sin \frac{1}{x^2}\right) > 0$. Кроме того, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sin(1/x^2))}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x^2)}{1/x^2} = 1$. (Использовали, что $\ln(1+t) \approx t, \sin t \approx t$ при $t \rightarrow 0$). Поэтому применима 2-я теорема сравнения и сходимость доказана.

Перейдем к несобственным интегралам от функций, меняющих свой знак.

Определение. $\int_a^{\omega} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится

$\int_a^{\omega} |f(x)|dx$ (и, разумеется, если $\int_a^b f(x)dx$ существует для любого $b < \omega$).

Теорема. Абсолютно сходящийся интеграл – сходится.

Доказательство. Это следует из критерия Коши существования предела функции, примененного к $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ и $\tilde{F}(b) = \int_a^b |f(x)|dx$. Именно: дано, что

$\forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon) > 0 \forall b_1, b_2 > B(\varepsilon), b_1, b_2 < \omega \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon$. Но тогда $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon$

по свойствам собственного интеграла и, значит, выполнен критерий Коши для

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Замечание. Часто формулировка теоремы вызывает недоумение. Зачем что-то ещё доказывать, если и так сказано, что интеграл «абсолютно сходится»? Слово «абсолютно» в применении к свойствам некоторого объекта обычно выражает полную уверенность в выполнении этих свойств. Дело здесь в том, что словам, использованным в математическом определении, не стоит придавать присущий им в обычной речи смысл. Это просто условные наименования того или иного свойства. Например, мы могли бы сказать вместо слов , что интеграл «абсолютно сходится» , что интеграл $\int_a^{\omega} f(x)dx$, для которого сходится $\int_a^{\omega} |f(x)|dx$

называется «хорошим». Тогда теорема бы звучала так: хороший интеграл сходится. Это означало бы, свойство интеграла быть «хорошим» является усилением свойства его сходимости. Таким образом, в теореме доказано, что абсолютная сходимости интеграла является усилением свойства его сходимости.

Вместе с тем, существуют сходящиеся интегралы $\int_a^{\omega} f(x)dx$ такие, что $\int_a^{\omega} |f(x)|dx$ расходится. Такие интегралы называются *условно сходящимися*. Примером служит $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Первое слагаемое – это собственный интеграл. Второй интеграл, по определению, равен $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\cos b}{b} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$. Так как $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\cos b}{b} \right) = 0$, а $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ и $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ - сходится, то рассматриваемый интеграл сходится.

С другой стороны, если бы сходилась $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$, то из неравенства $|\sin x| \geq \sin^2 x$ следовало бы, что $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ - сходится. Но это не так, поскольку $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ и $\int_1^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$. Причем первый из интегралов расходится, а второй – сходится, что можно доказать аналогично доказательству сходимости $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Билет 13. Пространство $\mathbb{R}^n$, множества в нём

■ Пространство $\mathbb{R}^n$, метрическое пространство

Приступаем к изучению функций нескольких переменных, поскольку для описания многих процессов приходится рассматривать величины, зависящие от нескольких переменных $x_1, \dots, x_n$, т.е. выражения вида $f(x_1, \dots, x_n)$.

Напомним, что *арифметическое n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$* представляет собой множество точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.

Более того, в $\mathbb{R}^n$ можно ввести скалярное произведение, определённое равенством

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \quad (1)$$

Пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением представляет собой *евклидово n -мерное пространство*. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы используем символ $\mathbb{R}^n$ для обозначения именно этого евклидова пространства.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ определена *норма(длина)вектора $\bar{x}$* , равная

$$|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

и расстояние между $\bar{x}$ и $\bar{y}$, заданное формулой

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x} - \bar{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (2)$$

При $n = 2$ и $n = 3$ эта формула становится известной формулой для расстояний на плоскости и в пространстве, поэтому общую формулу (2) для расстояния можно рассматривать как естественное обобщение известных формул на случай n -мерного пространства.

Определение 1. Пара (M, ρ) , состоящая из множества M и определённой на парах его элементов функции ρ , обладающей следующими свойствами:

1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in M$ выполнено неравенство $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, причем $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$;
2. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in M$ выполнено равенство $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, \bar{x})$;
3. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in M$ выполнено неравенство $\rho(\bar{x}, \bar{z}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{y}) + \rho(\bar{y}, \bar{z})$.

называется *метрическим пространством*, а ρ - *метрикой* (или *расстоянием*) на этом пространстве. Свойства 1-3 называются *аксиомами расстояния (метрики)*, при этом свойство 3 называется *неравенством треугольника*.

Теорема 1. $\mathbb{R}^n$ - метрическое пространство с расстоянием, определённым равенством (2).

Требуется доказать, что введённая формулой (2) величина обладает следующими свойствами

1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \quad \rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, причем $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$;
2. $\forall \bar{x}, \bar{y} \quad \rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, \bar{x})$;

$$3. \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \quad \rho(\bar{x}, \bar{z}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{y}) + \rho(\bar{y}, \bar{z}).$$

Первые два из них очевидны для величины (2). Для доказательства свойства 3, которое называется *неравенством треугольника*, рассмотрим скалярное произведение $(\bar{a} - t\bar{b}, \bar{a} - t\bar{b})$, где $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$ – произвольные векторы, t – любое число.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$1 (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a}).$$

$$2 (\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}).$$

$$3 (\lambda \bar{a}, \bar{b}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b}).$$

$$4 (\bar{a}, \bar{a}) \geq 0, (\bar{a}, \bar{a}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}.$$

По свойству 4 скалярного произведения для любого t выполняется неравенство $(\bar{a} - t\bar{b}, \bar{a} - t\bar{b}) \geq 0$. Используя свойства 1-3 скалярного произведения, перепишем

это неравенство в виде

$$(\bar{a}, \bar{a}) - 2t(\bar{a}, \bar{b}) + t^2(\bar{b}, \bar{b}) \geq 0, \text{ или } |\bar{a}|^2 - 2t(\bar{a}, \bar{b}) + t^2|\bar{b}|^2 \geq 0.$$

То, что квадратный трёхчлен неотрицателен при любом t , означает, что его дискриминант неположителен, т.е. что $(\bar{a}, \bar{b})^2 - |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 \leq 0$. Это неравенство, кстати, выполняется и при $\bar{b} = \bar{0}$. Таким образом, доказано, что для всех векторов $\bar{a}, \bar{b}$ справедливо неравенство

$$|(\bar{a}, \bar{b})| \leq |\bar{a}||\bar{b}|,$$

называемое *неравенством Коши-Буняковского*. Отметим, что в его левой части стоит модуль числа, равного скалярному произведению векторов, в правой части - произведение норм векторов. Из этого неравенства следует неравенство для норм векторов

$$|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|.$$

Для доказательства этого неравенства рассмотрим квадрат его левой части и используем неравенство Коши-Буняковского:

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = (\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) = |\bar{a}|^2 + 2(\bar{a}, \bar{b}) + |\bar{b}|^2 \leq |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}| + |\bar{b}|^2 = (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2.$$

Неравенство доказано. Для того, чтобы доказать неравенство

$\rho(\bar{x}, \bar{z}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{y}) + \rho(\bar{y}, \bar{z})$, перепишем его в виде $|\bar{x} - \bar{z}| \leq |\bar{x} - \bar{y}| + |\bar{y} - \bar{z}|$ и применим

неравенство $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$ при $\bar{a} = \bar{x} - \bar{y}, \bar{b} = \bar{y} - \bar{z}, \bar{a} + \bar{b} = \bar{x} - \bar{z}$. Теорема доказана.

$\mathbb{R}^n$ при $n=1$ - это обычная числовая прямая, при $n=2$ и $n=3$, соответственно, плоскость и пространство. Удобство в рассмотрении абстрактного пространства $\mathbb{R}^n$ состоит, в частности, в том, что не имея интуитивного представления о геометрии этого пространства при $n \geq 4$ мы можем, тем не менее, вычислять расстояния (и углы) в этом пространстве.

■ Внутренние, предельные, граничные точки множества в метрическом пространстве

Мы рассматриваем произвольное метрическое пространство (M, ρ) и его важный частный случай – пространство $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. ε - окрестностью точки $\bar{a}$ метрического пространства

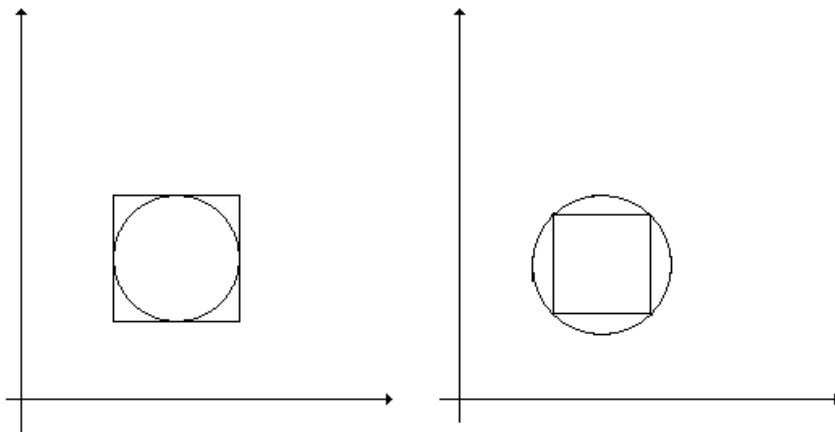
(M, ρ) называется множество точек $\bar{x} \in (M, \rho)$ таких, что $\rho(\bar{x}, \bar{a}) < \varepsilon$. Обозначим ее $U_\varepsilon(\bar{a})$. Очень часто мы будем называть ε - окрестность точки $\bar{a}$ *открытым шаром радиуса ε с центром в точке $\bar{a}$* . Проколотая ε - окрестность точки $\bar{a}$ состоит из точек $\bar{x} \in (M, \rho)$, для которых $0 < \rho(\bar{x}, \bar{a}) < \varepsilon$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n=1$ ε - окрестность представляет собой интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. ε - окрестность в пространстве $\mathbb{R}^2$ изображена на рисунке:

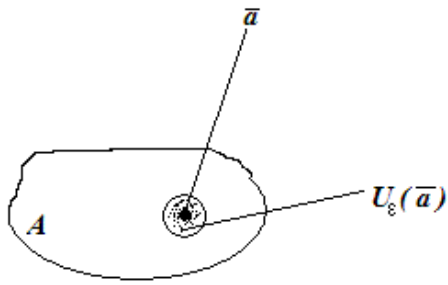


Замечание. Часто вместо «круглых» окрестностей рассматривают «прямоугольные», т.е. $\{\bar{x} : |x_i - a_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$.

Легко видеть, что каждую «круглую» окрестность можно вписать в «прямоугольную» и наоборот. Поэтому приведённые ниже определения можно переформулировать в терминах прямоугольных окрестностей.



Определение 3. Пусть $\bar{a} \in A \subset (M, \rho)$. Тогда $\bar{a}$ называется *внутренней точкой* множества A , если она входит в это множество вместе с некоторой окрестностью, т.е. $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\bar{a}) \subset A$.



Определение 4. Пусть $A \subset (M, \rho)$. Точка $\bar{a} \in (M, \rho)$ называется *предельной точкой множества A* , если любая проколота окрестность этой точки пересекается с множеством A , т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \dot{U}_\varepsilon(\bar{a}) \cap A \neq \emptyset$.

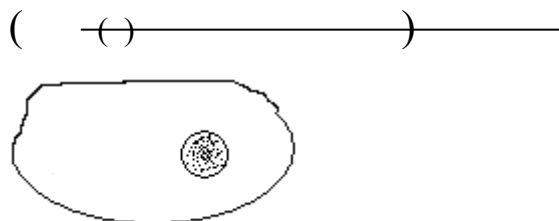
Предельная точка множества может как принадлежать этому множеству, так и не принадлежать ему. Точка множества, не являющаяся его предельной точкой, называется *изолированной точкой этого множества*. Изолированная точка множества имеет проколотую окрестность, не пересекающуюся с множеством.

Определение 5. Пусть $A \subset (M, \rho)$. Точка $\bar{a} \in (M, \rho)$ называется *граничной точкой множества A* , если любая проколота окрестность этой точки пересекается с как с множеством A , так и с его дополнением, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \dot{U}_\varepsilon(\bar{a}) \cap A \neq \emptyset, \dot{U}_\varepsilon(\bar{a}) \cap {}^c A \neq \emptyset$.

■ Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве

Определение 6. Множество $G \subset (M, \rho)$ называется *открытым множеством этого пространства*, если все его точки – внутренние.

Примеры: интервал в $\mathbb{R}^1$, круг без границы в $\mathbb{R}^2$, ε – окрестность точки $\bar{a}$ в метрическом пространстве (M, ρ) . Первые два примера не требуют дополнительных пояснений(см. рис.)



Докажем утверждение третьего примера. Для этого рассмотрим любую точку $\bar{x}$ из ε – окрестности точки $\bar{a}$. Для неё выполнено неравенство $\rho(\bar{a}, \bar{x}) < \varepsilon$.

Обозначим $\delta = \frac{\varepsilon - \rho(\bar{a}, \bar{x})}{2} > 0$ и рассмотрим δ – окрестность точки $\bar{x}$. Для любой

точки $\bar{y}$ из этой окрестности выполнены неравенства $\rho(\bar{a}, \bar{y}) \leq \rho(\bar{a}, \bar{x}) +$

$$\rho(\bar{y}, \bar{x}) \leq \rho(\bar{a}, \bar{x}) + \delta = \rho(\bar{a}, \bar{x}) + \frac{\varepsilon - \rho(\bar{a}, \bar{x})}{2} = \frac{\varepsilon + \rho(\bar{a}, \bar{x})}{2} < \varepsilon, \text{ поэтому}$$

δ – окрестность точки $\bar{x}$ целиком содержится в ε – окрестности точки $\bar{a}$.

Определение 7. Множество $F \subset (M, \rho)$ называется *замкнутым множеством* этого пространства, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры: отрезок в $\mathbb{R}^1$, круг с границей в $\mathbb{R}^2$.

Замечание. Всё пространство (M, ρ) и пустое множество по определению являются одновременно как открытыми, так и замкнутыми множествами.

Замечание. Не следует считать, что любое множество является либо открытым, либо замкнутым. Примером, опровергающим это предположение, служит полуинтервал в $\mathbb{R}^1$. Открытое множество не содержит своих граничных точек, а замкнутое множество – содержит все свои граничные точки.

Свойства открытых и замкнутых множеств в метрическом пространстве (M, ρ) (в частности, в $\mathbb{R}^n$) описывают следующие теоремы.

Теорема 2. Дополнение к открытому множеству $G \subset (M, \rho)$ представляет собой замкнутое множество $F \subset (M, \rho)$, а дополнение к замкнутому множеству $F \subset (M, \rho)$ представляет собой открытое множество $G \subset (M, \rho)$.

► Пусть $G \subset (M, \rho)$ – открытое множество этого пространства и пусть точка $\bar{a}$ – предельная точка его дополнения $F \subset (M, \rho)$. Требуется доказать, что $\bar{a} \in F$. Если это не так, т.е. $\bar{a} \notin F$, то $\bar{a} \in G = {}^c F$ и, следовательно, $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\bar{a}) \subset G$. Тогда $U_\varepsilon(\bar{a}) \cap F = \emptyset$, вопреки тому, что точка $\bar{a}$ – предельная точка $F \subset (M, \rho)$.

Обратно, пусть $F \subset (M, \rho)$ замкнутое множество и пусть $G \subset (M, \rho)$ – его дополнение. Пусть точка $\bar{a} \in G$. Требуется доказать, что $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\bar{a}) \subset G$. Из

условия $\bar{a} \in G$ следует, что $\bar{a} \notin F$ и, следовательно, $\bar{a}$ – не предельная точка $F \subset (M, \rho)$. Поэтому $\exists \dot{U}_\varepsilon(\bar{a}): \dot{U}_\varepsilon(\bar{a}) \cap F \neq \emptyset$. Это означает, что $\dot{U}_\varepsilon(\bar{a}) \subset G$ и, значит, $U_\varepsilon(\bar{a}) \subset G$, так как $\bar{a} \in G$. ◀

Теорема 3.

1. Для любой системы открытых множеств G_α их объединение $\bigcup_\alpha G_\alpha$ – также открытое множество.

2. Для конечной системы открытых множеств $G_1, \dots, G_n$ их пересечение $\bigcap_{k=1}^n G_k$ – также открытое множество.

3. Для любой системы замкнутых множеств F_β их пересечение $\bigcap_\beta F_\beta$ – также замкнутое множество.

4. Для конечной системы замкнутых множеств $F_1, \dots, F_n$ их объединение $\bigcup_{k=1}^n F_k$ – также замкнутое множество.

► Пусть $\bar{a} \in \bigcup_\alpha G_\alpha$. Тогда, при некотором α точка $\bar{a} \in G_\alpha$ и, так как все G_α – открытые множества, некоторая окрестность $U(\bar{a})$ также входит в G_α , а следовательно, $U(\bar{a}) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$. Первое утверждение доказано. Рассмотрим теперь

$\bigcap_{k=1}^n G_k$. Для любого $k, k=1, \dots, n$ существует число δ_k такое, что

$U_{\delta_k}(\bar{a}) \subset G_k, k=1, \dots, n$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Тогда $U_\delta(\bar{a}) \subset U_{\delta_k}(\bar{a}) \subset G_k, k=1, \dots, n$

и, поэтому, $U_\delta(\bar{a}) \subset \bigcap_{k=1}^n G_k$. Второе утверждение доказано. Для доказательства третьего и четвёртого утверждений достаточно применить законы де Моргана,

$${}^c \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha {}^c A_\alpha, \quad \bigcap_\beta B_\beta = \bigcup_\beta {}^c B_\beta,$$

Доказанные выше первое и второе утверждения теоремы и теорему 2. ◀

Замечание. Бесконечное пересечение открытых множеств может оказаться замкнутым. Например, если $G_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$, то $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = [0, 1]$. В этом легко

убедиться так: точки отрезка, разумеется, входят в пересечение всех интервалов $G_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Пусть $\beta > 1$. Если выбрать число n так, чтобы

выполнялось неравенство $1 + \frac{1}{n} < \beta$ (что выполняется при $n > \frac{1}{\beta - 1}$), то

$\beta \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Аналогично проверяется, что если $\alpha < 0$, то

$\alpha \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

Бесконечное объединение замкнутых множеств может оказаться открытым множеством. Например, если $F_n = \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 3)$. В данном случае очевидно, что никакое число $a \leq 0$ и никакое число $b \geq 3$ не принадлежат $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, так как не входят ни в одно из множеств $F_n = \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$. Осталось доказать, что для любого числа $c, 0 < c < 3$ существует номер n такой, что $c \in F_n = \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$. Для этого достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства $\frac{1}{n} < c, c < 3 - \frac{1}{n}$, что будет верно, если $n > \max\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{3 - c}\right)$.

■ Компактные множества в метрическом пространстве

Определение 8. Множество K называется *компактным в метрическом пространстве* (M, ρ) , если из любой бесконечной системы открытых множеств G_α такой, что $K \subset \bigcup_{\alpha} G_\alpha$ можно выбрать конечное число $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ так, что $K \subset \bigcup G_{\alpha_1} \dots \bigcup G_{\alpha_m}$.

Определение 9. Подмножество метрического пространства (M, ρ) называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре этого пространства.

Теорема 4(Критерий компактности в пространстве $\mathbb{R}^n$). Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограниченное (т.е. содержится в некотором шаре с центром в начале координат) и замкнутое.

Иногда утверждение этой теоремы принимают за определение компактного множества в $\mathbb{R}^n$.

По этой теореме, например, замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и радиуса R , представляющий собой множество точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$,

удовлетворяющих условию $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} \leq R$, является компактным множеством. (Без доказательства).

Билет 14. Функции, отображения, их пределы и непрерывность

Определение 1. Функция $y = f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n), f(\bar{x}): X \rightarrow \mathbb{R}$ сопоставляет элементам множества $X \subset \mathbb{R}^n$ (называемого областью определения этой функции) числа $y \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Отображение $\bar{f}(\bar{x}): X \rightarrow \mathbb{R}^m$ сопоставляет элементам множества $X \subset \mathbb{R}^n$ элементы $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$.

Таким образом, функция – это частный случай отображения ($m = 1$). Задать отображение $\bar{f}(\bar{x}): X \rightarrow \mathbb{R}^m$ – это все равно, что задать m функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

определённых на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$.

Примеры.

1. $z = x + y$ - функция двух переменных, паре (x, y) сопоставляет число

$$z, z = x + y.$$

2. Отображение $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{cases}.$$

3. Вектор-функция $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, t \rightarrow (x, y, z) \\ z = bt \end{cases}$ Винтовая линия.

4. Последовательность $\{\bar{a}_n = (a_{1,n}, \dots, a_{m,n}), n \in \mathbb{N}\}$ представляет собой отображение $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

■ Предел, непрерывность функции и отображения

Пусть $\bar{a} \in \mathbb{R}^n, \bar{b} \in \mathbb{R}^m, \bar{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \bar{a}$ — предельная точка области определения D отображения $\bar{f}$.

Определение 3. Пределом отображения $\bar{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ при стремлении $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ называется элемент $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющий условию

$$\forall V(\bar{b}) \exists \dot{U}(\bar{a}) \forall \bar{x} \in \dot{U}(\bar{a}) \cap D \quad \bar{f}(\bar{x}) \in V(\bar{b}).$$

Для предела отображения используется обычное обозначение $\bar{b} = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x})$

Рассматривая симметричные окрестности, перепишем это определение в метрических пространствах следующим образом

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x} \in \dot{U}_\delta(\bar{a}) \cap D \quad \bar{f}(\bar{x}) \in V_\varepsilon(\bar{b}).$$

Для наиболее часто встречающегося случая, когда отображение определено в некоторой проколотой окрестности точки $\bar{a}$, это определение принимает вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x}: 0 < \rho_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, \bar{a}) < \delta \text{ выполняется неравенство } \rho_{\mathbb{R}^m}(\bar{f}(\bar{x}), \bar{b}) < \varepsilon.$$

Или, вспоминая определение (2) расстояния в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x}: 0 < \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} < \delta \text{ выполняется неравенство } \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(\bar{x}) - b_i)^2} < \varepsilon$$

Теорема 1. Отображение $\bar{f}(\bar{x}): X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет при стремлении к предельной точке $\bar{a}$ множества X предел $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$ тогда и

только тогда, когда для всех составляющих это отображение функций $f_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, m$ выполнено равенство $\lim_{x \rightarrow a} f_i(\bar{x}) = b_i$.

► $\Rightarrow$ Поскольку $\sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(\bar{x}) - b_i)^2} < \varepsilon$, выполняются неравенства $|f_i(\bar{x}) - b_i| < \varepsilon$

при $i = 1, \dots, m$. Но это как раз и означает, что $\lim_{x \rightarrow a} f_i(\bar{x}) = b_i$.

◀. Пусть $\varepsilon > 0$ - фиксировано. Выберем $\delta_1, \dots, \delta_m$ так, чтобы при

$0 < \rho(\bar{x}, \bar{a}) < \delta_i$ выполнялось неравенство $|f_i(\bar{x}) - b_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Взяв $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_m)$

получаем, что при $0 < \rho(\bar{x}, \bar{a}) < \delta$ выполняется неравенство $\sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(\bar{x}) - b_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$

◀

Определение 4. Отображение $\bar{f}(\bar{x})$ множества $X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке $\bar{a} \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x} \in U_\delta(\bar{a}) \cap X \quad \bar{f}(\bar{x}) \in V_\varepsilon(\bar{f}(\bar{a})).$$

Здесь $U_\delta(\bar{a}) \subset \mathbb{R}^n$, $V_\varepsilon(\bar{f}(\bar{a})) \subset \mathbb{R}^m$. В случае, когда $\bar{a}$ является изолированной точкой множества X , отображение является непрерывным в этой точке. Если же $\bar{a}$ - предельная точка множества X , непрерывность отображения означает, что $\lim_{x \rightarrow a} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{a})$.

Согласно сказанному выше, непрерывность отображения $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$ равносильна непрерывности всех функций $f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})$.

Так же, как и в случае функций одной переменной, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если $\lim_{x \rightarrow a} f_1(\bar{x}) = A_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(\bar{x}) = A_2$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})) = A_1 + A_2$,

$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(\bar{x}) - f_2(\bar{x})) = A_1 - A_2$, и если $A_2 \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(\bar{x})}{f_2(\bar{x})} = \frac{A_1}{A_2}$.

Замечание. Доказательство теоремы 2 ничем не отличается от доказательства теоремы об арифметических свойствах предела функции одной переменной.

Замечание. Как и в одномерном случае, при предельном переходе для функций нескольких переменных сохраняется нестрогое неравенство. Точно также сохраняется теорема о «зажатой» переменной.

Следствие. Сумма, разность, произведение и частное (при $f_2(\bar{x}) \neq 0$) непрерывных функций $f_1(\bar{x})$ и $f_2(\bar{x})$ являются непрерывными функциями.

Теорема 3.. Если $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ непрерывно в точке $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{b} = \bar{f}(\bar{a}) \in \mathbb{R}^m$, отображение $\bar{z} = \bar{g}(\bar{y})$ непрерывно в точке $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$, то отображение $\bar{z} = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$ непрерывно в точке $\bar{a}$.

► Для простоты считаем, что отображение $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ определено в некоторой окрестности точки $\bar{a}$, а отображение $\bar{z} = \bar{g}(\bar{y})$ определено в некоторой окрестности точки $\bar{b}$. Для всякой окрестности $W_\varepsilon(\bar{g}(\bar{b}))$ существует окрестность $V_\gamma(\bar{b})$ такая, что $\forall \bar{y} \in V_\gamma(\bar{b}) \quad \bar{g}(\bar{y}) \in W_\varepsilon(\bar{g}(\bar{b}))$. Но $\forall V_\gamma(\bar{b}) \quad \exists U_\delta(\bar{a}) : \forall \bar{x} \in U_\delta(\bar{a}) \quad \bar{f}(\bar{x}) \in V_\gamma(\bar{b})$. Эта окрестность $U_\delta(\bar{a})$ - искомая, т.к. $\bar{f}(\bar{x}) \in V_\gamma(\bar{b}) \Rightarrow \bar{g}(\bar{f}(\bar{x})) \in W_\varepsilon(\bar{g}(\bar{b}))$. ◀

Теорема 4. (Теорема о сохранении знака непрерывной функции). Если $f \in C(\bar{a})$, $f(\bar{a}) \neq 0$, то $\exists U(\bar{a}) : \forall \bar{x} \in U(\bar{a}) \quad f(\bar{x})f(\bar{a}) > 0$.

► Для простоты считаем, что отображение $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ определено в некоторой окрестности точки $\bar{a}$. Достаточно доказать, что если $f(\bar{a}) > 0$, то и $f(\bar{x}) > 0$. Действительно, взяв $\varepsilon = \frac{f(\bar{a})}{2}$ получаем, по определению непрерывности, окрестность $U(\bar{a})$ такую что $\forall \bar{x} \in U(\bar{a}) :$

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \frac{f(\bar{a})}{2} \Rightarrow f(\bar{x}) > \frac{f(\bar{a})}{2} > 0. \quad \blacktriangleleft$$

Теорема 5. Непрерывный образ компактного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ есть компактное подмножество $\mathbb{R}^m$.

Следствие. Непрерывная на компакте функция достигает на нём своего наибольшего и наименьшего значений.

Частный случай этой теоремы состоит в том, что непрерывный образ отрезка представляет собой отрезок.

Определение 5. Множество X в метрическом пространстве (M, ρ) называется *связным*, если не существуют открытые множества A, B такие, что $A \cap B = \emptyset, A \cap X \neq \emptyset, B \cap X \neq \emptyset, X \subset A \cup B$.

Теорема 6. Непрерывный образ связного множества есть связное множество.

Замечание. Эта теорема обобщает теорему о том, что непрерывный образ промежутка представляет собой числовой промежуток.

Теорема 7.(Теорема Кантора). Непрерывная на компакте K функция равномерно непрерывна на нем, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 : \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < \delta$
 $|f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2)| < \varepsilon$.

Билет 15. Дифференцируемость функции многих переменных. Достаточные условия дифференцируемости функции

■ **Определение дифференцируемости функции многих переменных.**

Частные производные

Пусть $f(\bar{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x}$ - точка из этой окрестности.

Определение 1. Величина $f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \Delta f(\bar{a})$ называется *приращением* функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ соответствующим приращению аргумента $\bar{x} - \bar{a} = \Delta \bar{x}$.

Обозначим $\Delta \bar{x}_i = \bar{x}_i - \bar{a}_i, i = 1, \dots, n$

Определение 2. Функция $f(\bar{x})$ называется *дифференцируемой* в точке $\bar{a}$, если для всех $i = 1, \dots, n$ существуют постоянные числа A_i и функции $\alpha_i = \alpha_i(\Delta \bar{x})$, $\alpha_i(\Delta \bar{x}) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow \bar{a}, \alpha_i(0) = 0$ такие, что выполнено равенство:

$$\Delta f(\bar{a}) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \alpha_1(\Delta \bar{x}) \Delta x_1 + \dots + \alpha_n(\Delta \bar{x}) \Delta x_n. \quad (1)$$

Используя знаки суммы, перепишем равенство (1) в виде

$$\Delta f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Delta \bar{x}) \Delta x_i.$$

Замечание. Определение дифференцируемой функции часто записывают в виде

$$\Delta f(\bar{a}) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \gamma(\Delta \bar{x}) \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}, \quad (2)$$

где $\gamma(\Delta \bar{x}) \rightarrow 0$ при $\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}$, $\gamma(\bar{0}) = 0$. Условие (2) равносильно условию (1), см. задачу 1.

При $n=1$ определение 2 совпадает с известным определением

дифференцируемости $f(x)$. Для функций одной переменной

дифференцируемость равносильна существованию производной. В случае нескольких переменных ситуация несколько сложнее.

Введем в рассмотрение величину

$$\Delta_i f(\bar{a}) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n).$$

Она представляет собой приращение функции при фиксированных значениях всех переменных $x_j \equiv a_j, j \neq i$, кроме i -той.

Пусть $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$. Тогда для любого $i, i=1, \dots, n$ равенство (1) дает

$$\Delta_i f(\bar{a}) = A_i \Delta x_i + \alpha_i(\Delta \bar{x}) \Delta x_i. \quad (3)$$

Поскольку условие $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ при фиксированных значениях $x_j \equiv a_j, j \neq i$

равносильно тому, что $x_i \rightarrow a_i$, равенство (3) означает, что функция

$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ одной переменной x_i дифференцируема в точке a_i .

Значит, существует предел

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{\Delta_i f(\bar{a})}{x_i - a_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) = A_i, \quad (4)$$

называемый, по определению, *частной производной функции $f(\bar{x})$ по*

переменной x_i в точке $\bar{a}$. Иными словами, частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ равна

производной функции $f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ одной переменной x_i в точке

a_i . (Отметьте, что мы сначала подставляем в функцию значения остальных переменных, а потом дифференцируем полученную функцию по оставшейся переменной, см. задачу в конце билета!)

Мы, тем самым, доказали теорему:

Теорема 1. Если $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$, то для всех $i, i=1, \dots, n$ существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$.

Таким образом, существование частных производных – необходимое условие дифференцируемости. При этом равенство (1) принимает вид

$$\Delta f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Delta \bar{x}) \Delta x_i,$$

где $\alpha_i(\Delta \bar{x}) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$, $\alpha_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Другое необходимое условие дифференцируемости – непрерывность функции, как показывает следующая теорема.

Теорема 2. Если $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$, то $f \in C(\bar{a})$.

► Достаточно доказать, что $\Delta f(\bar{a}) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$, (т.к. $f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \Delta f(\bar{a})$ и $\Delta f(\bar{a}) = 0$ при $\bar{x} = \bar{a}$). Это утверждение сразу следует из равенства (1), так как $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \Delta x_i = 0$. ◀

Предположим теперь, что при всех $i = 1, \dots, n$ существуют частные производные, определённые равенством (4). При $n = 1$ существование производной функции и её дифференцируемость были равносильны. Однако при $n > 1$ из существования частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$, $i = 1, \dots, n$, не следует

даже непрерывность функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ и тем более не следует дифференцируемость $f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$, согласно теореме 2.

Пример. $n = 2$, $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 x_2 = 0, \\ 1, & \text{если } x_1 x_2 \neq 0. \end{cases}$ Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0,0)}{\Delta x_1} = 0$, так

как $f(\Delta x_1, 0) = 0$ ($\Delta x_1 \cdot 0 = 0$). Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$, однако $f(x_1, x_2)$ даже не непрерывна в точке $(0,0)$, поскольку в любой окрестности этой точки она принимает значения 0 и 1.

■ Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных

Достаточное условие дифференцируемости даёт следующая теорема.

Теорема 3. Пусть частные производные $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ существуют в окрестности точки $\bar{a}$ и непрерывны в этой точке. Тогда $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$.



Пусть $\bar{x}$ и все точки $(a_1, x_2, \dots, x_n), (a_1, a_2, x_3, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ принадлежат рассматриваемой окрестности точки $\bar{a}$. Приращение функции $f(\bar{x}) - f(\bar{a})$ представим в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n) + f(a_1, a_2, x_3, \dots, x_n) + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) \quad (5)$$

и рассмотрим разности

$$f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \quad (6)$$

составляющие в сумме приращение (5).

Положим $\phi(x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, \dots, x_n)$ (то есть фиксируем все переменные, кроме x_k). Тогда рассматриваемая разность (6) имеет вид $\phi(x_k) - \phi(a_k)$ (поскольку

$\phi(a_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Функция ϕ по условию дифференцируема на отрезке, соединяющем a_k и x_k . Значит, она непрерывна на этом отрезке и можно применить теорему Лагранжа, согласно которой $\phi(x_k) - \phi(a_k) = \phi'(a_k + \Theta_k(x_k - a_k))(x_k - a_k)$, где $0 < \Theta_k < 1$. Но

$\phi'(a_k + \Theta_k(x_k - a_k)) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Theta_k(x_k - a_k), x_{k+1}, x_k)$. По условию

непрерывности частных производных

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_k + \Theta_k(x_k - a_k), x_{k+1}, x_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) + \alpha_k(\bar{x})$, где $\alpha_k(\bar{x}) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$.

Поэтому каждая из разностей (6) имеет вид $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a})(x_k - a_k) + \alpha_k(\bar{x})(x_k - a_k)$, а приращение (5) совпадает с (1) из определения дифференцируемости. ◀

Задача. Дифференцируема ли функция $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ в точке (0,0)? **Решение.**

Это – очень коварная задача! Приведём пример очень часто встречающегося неверного «решения». Как в предыдущей задаче, находим $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$

$\frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$. Подстановка вместо (x, y) чисел (0,0) приводит к

бессмысленным выражениям – частные производные не существуют! Ошибка в этом «решении» состоит в следующем. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ равна производной по x функции $f(x, 0) = \sqrt[3]{x \cdot 0} = 0$, поэтому $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Однако функция $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ не дифференцируема в точке (0,0), так как её приращение $\sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{0 \cdot 0}$ не имеет вида

$0x + 0y + \alpha_1(x, y)x + \alpha_2(x, y)y$, где $\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y) \rightarrow 0$ при $(x, y) \rightarrow (0,0)$.

Действительно, полагая $y = x$ и предполагая, что $\sqrt[3]{xy} = 0x + 0y + \alpha_1(x, y)x + \alpha_2(x, y)y$, получаем $\sqrt[3]{x^2} = (\alpha_1(x, x) + \alpha_2(x, x))x$, или $1 = (\alpha_1(x, x) + \alpha_2(x, x)) \cdot x^{\frac{1}{3}}$ что невозможно, так как при $x \rightarrow 0$ правая часть стремится к 0, а левая нет!

Билет 16. Дифференциал функции многих переменных. Производная сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть $f(\bar{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\bar{a}$, и пусть в этой точке существуют $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$, $i = 1, \dots, n$.

Определение. Линейная функция от n независимых переменных $h_1, \dots, h_n$ вида

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \cdot h_n \quad (1)$$

называется *дифференциалом* $f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ и обозначается $df(\bar{a})$.

Важное замечание. Для существования дифференциала требуется только существование частных производных. Функция из примера после теоремы 2 билета 15 имеет дифференциал в точке $(0,0)$, равный $0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2$, не будучи непрерывной в этой точке.

Дадим другое описание понятия дифференциала. Каждую из независимых переменных x_i , $i = 1, \dots, n$ можно рассматривать, как функцию x_i от самих этих

переменных, причем $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$, $i = 1, \dots, n$, а для любого i и любого $j \neq i$ имеем

$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$. Тогда, последовательно подставляя в равенство (1) переменные

x_i , $i = 1, \dots, n$, вместо $f(\bar{x})$, получаем:

$$dx_i = 0 \cdot h_1 + \dots + 1 \cdot h_i + 0 \cdot h_{i+1} + \dots + 0 \cdot h_n = h_i. \quad (2)$$

Подставляя в (1) вместо h_i величину dx_i согласно равенствам (2), получаем более часто употребляемую запись дифференциала:

$$df(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) dx_n. \quad (3)$$

Обычно величинам переменных h_i придают значения Δx_i приращений независимых переменных, не выводящих при их добавлении к точке $\bar{a}$ за границу рассматриваемой области.

Независимость переменных $x_1, \dots, x_n$ означает, что если взять какое-то приращение $\Delta \bar{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, то оно не меняется при переходе от одной точки области к другой (а для зависимых переменных переход к другой точке вызывает соответствующие изменения вектора $\Delta \bar{x}$).

Поэтому выражение (3) можно заменить выражением

$$df(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \Delta x_n \quad (4)$$

для независимых переменных $x_1, \dots, x_n$ (для них, напомним еще раз, $\Delta x_i = dx_i$).

Вспомним определение дифференцируемой функции: ее приращение имело вид

$$\Delta f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \Delta x_n + \alpha_1(\Delta \bar{x}) \Delta x_1 + \dots + \alpha_n(\Delta \bar{x}) \Delta x_n, \quad (5)$$

где $\alpha_i(\Delta \bar{x}) \rightarrow 0$ при $\Delta \bar{x} \rightarrow \bar{0}$.

Согласно (4), равенство (1) можно переписать в виде

$$\Delta f(\bar{a}) = df(\bar{a}) + \alpha_1(\Delta \bar{x}) \Delta x_1 + \dots + \alpha_n(\Delta \bar{x}) \Delta x_n.$$

Оно означает, что если функция дифференцируема и среди чисел $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$ есть отличное от нуля, то $df(\bar{a})$ представляет собой главную, притом линейную по $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$, часть приращения этой функции.

Определение . Определим (пока формально) вектор *градиента* функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ равенством

$$\text{grad} f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right).$$

Тогда дифференциал можно рассматривать, как скалярное произведение вектора градиента и вектора $d\bar{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$df(\bar{a}) = (\nabla f(\bar{a}), d\bar{x}).$$

Вектор градиента служит обобщением понятия производной функции одной переменной. Напомним, что $df(a) = f'(a)dx$.

■ Дифференциал отображения. Матрица Якоби

Для отображения $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$ пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ можно определить дифференциал этого отображения, положив

$$d\bar{f}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} df_1(\bar{a}) \\ \dots \\ df_m(\bar{a}) \end{pmatrix}.$$

При этом

$$d\bar{f}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a})dx_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a})dx_n \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a})dx_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a})dx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} = J d\bar{x}.$$

Определение . Матрица J , определённая равенством

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} = J,$$

называется *матрицей Якоби отображения*.

■ Производная сложной функции

Теорема 1. Пусть $f(\bar{x})$ — дифференцируемая в точке $\bar{a}$ функция.

1. Пусть $x_i = x_i(t)$ и $x_i(t_0) = a_i$, причем $x_i(t)$ — дифференцируемые в точке t_0 функции. Положим $F(t) = f(\bar{x}(t))$. Тогда

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) \cdot x'_i(t_0). \quad (6)$$

2. Пусть $x_i = x_i(t_1, \dots, t_k), i = 1, \dots, n$ – дифференцируемые функции в точке, $\bar{t}^0 = (t_1^0, \dots, t_k^0), \bar{x}(\bar{t}^0) = \bar{a}$. Тогда для $F(\bar{t}) = f(\bar{x}(\bar{t}))$ имеют место равенства

$$\frac{\partial F(\bar{t}^0)}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(\bar{t}^0)}{\partial t_j}, j = 1, \dots, k. (71)$$

Равенства (6) и (7) дают правила вычисления производных сложных функций.

Достаточно доказать первое утверждение теоремы.

$$\begin{aligned} \Delta F(t_0) &= \Delta f(\bar{a}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)) - f(a_1, \dots, a_n) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a})(x_1(t) - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})(x_n(t) - a_n) + \alpha_1(\bar{x})(x_1(t) - a_1) + \dots + \alpha_n(\bar{x})(x_n(t) - a_n) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a})(x'_1(t)(t - t_0) + \beta_1(t)(t - t_0)) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})(x'_n(t)(t - t_0) + \beta_n(t)(t - t_0)) + \alpha_1(\bar{x}) \cdot \\ &\cdot (x'_1(t) + \beta_1(t))(t - t_0) + \dots + \alpha_n(\bar{x})(x'_n(t) + \beta_n(t))(t - t_0), \text{ где } \beta_i \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

В определении дифференцируемости функции $\alpha_i(\bar{x})$ определены в точке $\bar{a}$, $\alpha_i(\bar{a}) = 0$. Тогда $x_i(t) \rightarrow a_i$ при $t \rightarrow t_0$ (причём $x_i(t)$, может быть, и принимает значения a_i). Но тогда $\alpha_i(\bar{x}) \rightarrow 0$ (так как $\alpha_i(\bar{x})$ у нас определены в точке $\bar{a}$ и равны нулю в этой точке) и, таким образом,

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) \cdot x'_i(t_0).$$

■ Инвариантность формы первого дифференциала

Следствием правил вычисления производных сложных функций является инвариантность формы первого дифференциала. Именно, пусть функции $f(\bar{x}), \bar{x}(\bar{t})$ удовлетворяют условиям теоремы о производной сложной функции. Тогда для $F(\bar{t}) = f(\bar{x}(\bar{t}))$ имеем:

$$\begin{aligned} dF(\bar{t}) &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right) dt_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df(\bar{x}). \end{aligned}$$

Инвариантность формы первого дифференциала означает, что как в случае независимых переменных $x_1, \dots, x_n$, так и в случае зависимых переменных $x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)$ для вычисления первого дифференциала применима

формула $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Билет 17. Касательная плоскость. Производная по направлению. Градиент

Определим касательную плоскость к графику дифференцируемой функции $z = z(x, y)$ по аналогии с одномерным случаем. Напомним, что прямая называется *касательной к кривой*, заданной уравнением $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, если расстояние от точки кривой M до этой прямой представляет собой бесконечно малую функцию более высокого порядка, чем $x - x_0$ при $x \rightarrow x_0$. При этом касательная прямая имеет уравнение $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Определение . Будем называть плоскость *касательной к поверхности*, заданной уравнением $z = z(x, y)$, в точке (x_0, y_0, z_0) , если расстояние от точки $M(x, y, z(x, y))$ до этой плоскости есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Теорема 1. Функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) тогда и только тогда, когда существует касательная плоскость к этой поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) , $z_0 = z(x_0, y_0)$, не параллельная оси z . Касательная плоскость задается уравнением

$$z - z(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (1).$$

Доказательство. Уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и не параллельной оси z , можно представить в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) = z - z_0$. Расстояние от точки поверхности $(x, y, z(x, y))$ до этой плоскости равно

$$\frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z(x, y) - z(x_0, y_0))|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}. \quad (2)$$

Если $z(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то

$$z(x, y) - z(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \alpha(x, y)(x - x_0) + \beta(x, y)(y - y_0),$$

где $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ стремятся к нулю при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Положим в равенстве (2)

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), B = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$$

и получим, что расстояние от точки поверхности с координатами $(x, y, z(x, y))$ до плоскости

$$z - z(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (3)$$

равно

$$\frac{|\alpha(x, y)(x - x_0) + \beta(x, y)(y - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}},$$

что можно записать в виде

$$\gamma(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

где $\gamma(x, y) \rightarrow 0$ при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Это означает, что у графика дифференцируемой функции есть касательная плоскость, заданная уравнением (3). Обратно, если

$$\frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z(x, y) - z(x_0, y_0))|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} = \gamma(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

то, раскрывая модуль, получаем, что

$$\begin{aligned} z(x, y) - z(x_0, y_0) \\ = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \sqrt{A^2 + B^2 + 1} \cdot \gamma(x, y) \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned}$$

где $\gamma(x, y)$ стремится к нулю при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Это означает дифференцируемость функции $z(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .

■ Производная по направлению, градиент

Для функций многих переменных обычное определение монотонности (в случае возрастания, например, большему значению аргумента соответствует большее значение функции) утрачивает смысл, поскольку аргументы этих функций не лежат на одной прямой и сказать, что какая-то точка плоскости больше другой, нельзя.

Вместе с тем, во многих задачах, описываемых с помощью функций нескольких переменных, требуется определять некоторые характеристики поведения этих функций. Например, если Вы поднимаетесь в гору, то в каждой точке восхождения Вы намечаете направление, по которому предполагаете двигаться дальше. Опишем это формальным языком.

Предположим, что мы рассматриваем некоторую плоскость, на ней фиксируем точку M_0 и направление $\vec{l}$. Пусть для точек M этой плоскости, лежащих на прямой, параллельной вектору $\vec{l}$ и проходящей через точку M_0 , определена величина $z(M)$ - функция от точки M . Введём понятие величины отрезка M_0M следующим образом: $M_0M =$ длине отрезка M_0M со знаком "+", если $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{l}$

имеют одинаковые направления; $M_0M =$ длине отрезка M_0M со знаком “-”, если $\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ имеют разные направления.

Важно отметить, что пока мы не вводим никакой системы координат (точки на плоскости, направления, величины отрезков и функции от точек можно определить без системы координат). Например, температуру воздуха в данной точке обычно просто измеряют термометром, не задумываясь о системе координат в пространстве. Это означает, что разные наблюдатели, которые ввели независимо друг от друга свои системы координат, измеряя температуру воздуха в данной точке, получают одно и то же значение, иными словами, температура от наблюдателя не зависит.

Определение. Рассмотрим точки M , лежащие на прямой, проходящей через M_0 в указанном направлении $\bar{l}$ и соответствующую величину $\frac{z(M) - (M_0)}{M_0M}$; если существует предел этой величины при стремлении M к M_0 вдоль прямой, то он называется *производной функции $z(M)$ в точке M_0 по направлению $\bar{l}$* и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)$.

Для наглядности представим себе, что мы находимся на склоне горы и оцениваем её крутизну в зависимости от направления подъёма. Эта крутизна характеризуется производной от высоты холма по рассматриваемому направлению.

В определении производной по направлению координаты не участвовали. Это означает, что понятие производной по направлению не зависит от наблюдателя и пригодно для описания реальных процессов.

Однако для получения простой формулы для вычисления этой производной удобно ввести систему координат.

Теорема 2. Пусть направление $\bar{l}$ имеет координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в точке M_0 с координатами (x_0, y_0) . Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) \sin \alpha = (\text{grad} z(M_0), \bar{l}) = (\nabla z(M_0), \bar{l}). \quad (4)$$

Аналогично, в случае 3-х переменных для функции $u = u(x, y, z)$ и направления $\bar{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$,

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cos \gamma = (\text{grad} u(M_0), \bar{l}) = (\nabla u(M_0), \bar{l}). \quad (5)$$

Пусть M_0 имеет координаты (x_0, y_0) , M – координаты (x, y) , $\bar{l}$ имеет координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Тогда, вводя параметризацию $x = x_0 + t \cos \alpha$, $y = y_0 + t \sin \alpha$ для прямой, соединяющей точку M_0 с точкой M , $M_0M = t$, получаем:

$$\frac{z(M) - z(M_0)}{M_0 M} = \frac{z(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - z(x_0, y_0)}{t} =$$

(т. к. мы предположили, что $z(M)$ – дифференцируемая в точке (x_0, y_0))

$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot t \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot t \sin \alpha + \alpha_0(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) \cdot t \cos \alpha + \beta_0(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) \cdot t \sin \alpha}{t} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \sin \alpha + \alpha_0(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) \cos \alpha + \beta_0(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) \sin \alpha.$$

При $t \rightarrow 0$ $(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) \rightarrow (x_0, y_0)$ и $\alpha_0, \beta_0 \rightarrow 0$. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{z(M) - z(M_0)}{M_0 M} = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \sin \alpha = (\nabla z(M_0), \vec{l}).$$

Равенство (4) доказано.

Скалярное произведение в правых частях (4) и (5) можно представить, как скалярное произведение вектора градиента этой функции на единичный вектор направления, поэтому, например, равенство (15) имеет вид

$$|\nabla u(M_0)| \cdot \cos \phi \quad (\text{поскольку } |\vec{l}| = 1),$$

где

ϕ – угол между $\nabla u(M_0)$ и заданным направлением $\vec{l}$.

Мы видим, что выражение $|\nabla u(M_0)| \cdot \cos \phi$ имеет наибольшую величину, когда $\cos \phi = 1$. Это позволяет определить градиент, как вектор, модуль которого равен наибольшей из величин производных по направлению в этой точке. А направление его как раз такое, в котором производная по направлению достигает наибольшей величины. Это определение градиента, в котором не участвуют координаты, позволяет рассматривать его, как характеристику функции, не зависящую от наблюдателя.

Вместе с тем, выражение градиента через координаты удобно при его вычислении. Установим ряд важных свойств градиента.

Теорема 3. Пусть $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$ имеют все частные производные 1-го порядка.

Тогда

$$1. \nabla(f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x})) = \nabla f_1(\vec{x}) + \nabla f_2(\vec{x});$$

$$2. \nabla c f(\vec{x}) = c \nabla f(\vec{x});$$

$$3. \nabla(f_1(\vec{x}) \cdot f_2(\vec{x})) = f_1(\vec{x}) \nabla f_2(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) \nabla f_1(\vec{x});$$

$$4. \text{Если } f_2(\vec{x}) \neq 0, \text{ то } \nabla \frac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})} = \frac{f_2(\vec{x}) \nabla f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{x}) \nabla f_2(\vec{x})}{(f_2(\vec{x}))^2};$$

$$5. \text{Если } F(u) - \text{функция одной переменной, имеющая производную, то } \nabla F(f(\vec{x})) = F'(f(\vec{x})) \nabla f(\vec{x}).$$

► Доказательства всех этих свойств аналогичны. Разберем, например, свойство 3. Пусть, для определенности, $\bar{x} = (x, y, z)$. Тогда, по правилам

дифференцирования,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(f_1 \cdot f_2) &= f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z} \text{ и} \\ \nabla(f_1 \cdot f_2) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(f_1 \cdot f_2), \frac{\partial}{\partial y}(f_1 \cdot f_2), \frac{\partial}{\partial z}(f_1 \cdot f_2) \right) = \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x}, f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y}, f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) = \\ &= f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1 \end{aligned}$$

◀

Билет 18. Производные и дифференциалы высших порядков. Формулы Тейлора

■ Производные высших порядков

Определение 1. Если функция $f(\bar{x})$ обладает в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$ по переменной x_j , а эта частная производная,

рассматриваемая как функция от $\bar{x}$, в свою очередь, имеет частную производную по переменной x_i в точке $\bar{a}$, то эту производную называют

частной производной второго порядка и обозначают $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})$. При $i \neq j$, её

называют *смешанной производной* второго порядка по переменным x_j, x_i . В

случае $i = j$ используется обозначение $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\bar{a})$.

Далее индуктивным образом можно определить частные производные более высокого порядка.

Возникает вопрос, зависит ли величина смешанной производной по переменным x_j, x_i от порядка, в котором рассматриваются переменные.

Например, всегда ли $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a})$?

Ответ на него такой: нет, не всегда! Можно показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

имеет неравные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $f(x, y)$ определена в открытой области $D \subset \mathbb{R}^2$ и пусть в этой области существуют $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Пусть $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке (x_0, y_0) . Тогда в этой точке $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

► Пусть числа $h, k \neq 0$ выбраны так, что область D содержит все точки из прямоугольника со сторонами от x_0 до $x_0 + h$ и от y_0 до $y_0 + k$. Пусть

$$W(h, k) = \frac{1}{hk} (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)).$$

Положим

$$\phi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}, \quad \psi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h},$$

тогда

$$W = \left[\frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} \right] = \left[\frac{\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)}{k} \right].$$

В промежутке $[x_0; x_0 + h]$, по условию теоремы, функция $\phi(x)$ имеет производную

$$\phi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)}{k}. \text{ Следовательно, } \phi(x) \text{ непрерывна, выполнены условия}$$

теоремы Лагранжа, согласно которой

$$W = \left[\frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} \right] = \phi'(x_0 + \Theta_1 h) = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_1 h, y_0) \right) =$$

(вновь по теореме Лагранжа)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \Theta_1 h, y_0 + \Theta_2 k) \text{ где } 0 < \Theta_1 < 1, \quad 0 < \Theta_2 < 1.$$

С другой стороны, аналогично, получаем

$$W = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \Theta_3 h, y_0 + \Theta_4 k), \text{ где } 0 < \Theta_3 < 1, \quad 0 < \Theta_4 < 1.$$

Следовательно, устремляя (h, k) к $(0, 0)$, получаем, ввиду непрерывности

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} W = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0). \quad \blacktriangleleft$$

Замечание. По аналогии можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $u = f(x_1, \dots, x_n)$ определена в открытой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и имеет в этой области всевозможные частные производные до k -го порядка включительно и смешанные производные k -го порядка, причем все эти производные непрерывны в D . При этих условиях значение любой k -ой смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производится последовательное дифференцирование.

Например, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x}$ и т.п.

■ Дифференциалы высших порядков

Пусть $u = f(\bar{x})$ имеет частные производные в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в любой точке $\bar{x}$ этой области существует дифференциал $df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$,

представляющий собой линейную форму от переменных $dx_1, \dots, dx_n$. В этом выражении частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ представляют собой функции от $\bar{x}$.

Определение 2. Пусть $f(\bar{x})$ имеет частные производные 2-го порядка в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Определим *второй дифференциал функции $f(\bar{x})$* в любой точке $\bar{x}$ этой области равенством $d^2 f(\bar{x}) = d(df(\bar{x}))$.

Вычислим по определению второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2 f(\bar{x}) &= d(df(\bar{x})) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} d(dx_i)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} dx_i dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} dx_i dx_n\right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом выражении все частные производные вычислены в точке $\bar{x}$. Здесь и далее мы будем часто опускать запись рассматриваемой точки для уменьшения громоздкости формул.

Отметим, что если $x_1, \dots, x_n$ — независимые переменные, то $dx_1, \dots, dx_n$ можно считать постоянными величинами, не зависящими от $\bar{x}$. Поэтому их дифференциалы $d(dx_i)$ являются нулевыми формами, что будет обозначаться равенствами $d^2 x_i = 0, i = 1, \dots, n$. В этом случае второй дифференциал примет вид

$$d^2 f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Если все частные производные 2-го порядка непрерывны, то по теореме 1 получаем

$$d^2 f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \quad (2)$$

В этой формуле использованы обозначения $dx_i^2 = (dx_i)^2$.

Например, при $n = 2$ формула (2) принимает вид

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \quad (3)$$

при $n = 3$ формула (2) принимает вид

$$d^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz. \quad (4)$$

Приведённая формула уже при $n = 3$ выглядит громоздко. Облегчить запоминание поможет формальная операторная запись. Например, при $n = 2$ рассмотрим выражение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2, \quad (5)$$

правая часть которого получается возведением в квадрат левой части при использовании обозначений

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx \right)^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx dy = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} dy \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2. \text{ Сравнивая выражения}$$

(3) и (5) мы видим, что первое из них получится из второго, если заменить в (5) выражения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx dy, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 \quad (6)$$

соответственно, выражениями

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \quad (7)$$

Отметим, что выражения (7) получаются из (6) символическим умножением на f . Это позволяет нам, учитывая (3), (5), (6) и (7) получить удобную для запоминания операторную запись

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f. \quad (8)$$

В общем случае, используя аналогичную (8) формальную операторную запись, получаем

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f \quad (9)$$

Аналогично, полагая по определению $d^k f = d(d^{k-1} f)$, находим:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f, \quad (10)$$

в предположении, что для f существуют непрерывные частные производные до k - го порядка включительно. Доказательство этого утверждения можно провести индукцией по k . Мы не будем подробно останавливаться на этом. Вернёмся к формуле (1). Отметим, что если $x_i = x_i(t_1, \dots, t_k)$ (т.е. переменные x_i не независимые, а представляют собой функции от других переменных), то dx_i также зависят от переменных $t_1, \dots, t_k$ и в общем случае $d^2 x_i = d(dx_i)$ не являются нулевыми формами. Однако, если

$$x_i = a_{i,1}t_1 + \dots + a_{i,k}t_k + b_i \quad (11),$$

то $dx_i = a_{i,1}dt_1 + \dots + a_{i,k}dt_k$ и $d^2x_i = d(const) = 0$. Поэтому в случае линейной замены переменных (11) формулы (9) и (10) сохраняются.

■Второй дифференциал функции

Вернемся к формуле (9). Она означает, что второй дифференциал является квадратичной формой от переменных $dx_1, \dots, dx_n$. Как известно из курса алгебры, квадратичной форме сопоставляется матрица квадратичной формы, в данном случае имеющая вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

где все производные вычислены в рассматриваемой точке.

Формулы Тейлора

Теорема 3. Пусть функция $f(\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно в окрестности $U(\bar{x}^0)$ точки $\bar{x}^0$ и непрерывные производные порядка $n + 1$ в проколотой окрестности $\dot{U}(\bar{x}^0)$. Тогда для любой точки $\bar{x} \in \dot{U}(\bar{x}^0)$ существует число $\theta, 0 < \theta < 1$, такое, что,

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}^0) + df(\bar{x}^0) + \frac{d^2 f(\bar{x}^0)}{2} + \dots + \frac{d^n f(\bar{x}^0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\bar{x}^0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}^0))}{(n+1)!},$$

где все дифференциалы вычислены при $\Delta \bar{x} = \bar{x} - \bar{x}^0$.

► Соединим в пространстве $\mathbb{R}^m$ точку $\bar{x}^0$ с точкой $\bar{x}$ прямолинейным отрезком; запишем параметрические уравнения этого отрезка: любая его точка $\bar{x}(t)$, $t \in [0,1]$ имеет вид

$$\bar{x}(t) = \bar{x}^0 + t(\bar{x} - \bar{x}^0). \quad (14)$$

При $t = 0$ получаем $\bar{x}^0$, при $t = 1$ получаем $\bar{x}$.

Рассмотрим функцию одной переменной $F(t) = f(\bar{x}(t))$, определенную на отрезке $t \in [0,1]$. Уравнение (14) перепишем в виде системы

$$x_i(t) = x_i^0 + t(x_i - x_i^0), i = 1, \dots, m,$$

имеющей вид системы уравнений (11). Поэтому $d^k x_i = 0, k \geq 2, i = 1, \dots, m$.

Поэтому, при вычислении $d^k F(0), k \geq 2$, получаем, в соответствии с (10), что $d^k F(0) = d^k f(\bar{x}), k = 1, \dots, n, d^{n+1} F(\theta) = d^{n+1} f(\bar{x}(t) = \bar{x}^0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}^0))$ (15)

Осталось применить к функции $F(t)$ формулу Тейлора (формулу (5) главы 14):

$$F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{d^2 F(0)}{2} + \dots + \frac{d^n F(0)}{n!} + \frac{d^{n+1} F(\theta)}{(n+1)!}.$$

Подставляя в (16) равенства (15), получаем утверждение теоремы. ◀

Теорема 4. Пусть функция $f(\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно в окрестности $U(\bar{x}^0)$ точки $\bar{x}^0$. Тогда

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}^0) + df(\bar{x}^0) + \frac{d^2 f(\bar{x}^0)}{2} + \dots + \frac{d^n f(\bar{x}^0)}{n!} + o\left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2}\right)^n\right), \quad (16)$$

где $\bar{x} \rightarrow \bar{x}^0$.

► Для доказательства достаточно использовать теорему 3 с заменой числа n числом $n-1$:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}^0) + df(\bar{x}^0) + \frac{d^2 f(\bar{x}^0)}{2} + \dots + \frac{d^{n-1} f(\bar{x}^0)}{(n-1)!} + \frac{d^n f(\bar{x}^0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}^0))}{n!}$$

и заметить, что $d^n f(\bar{x}^0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}^0))$ представляет собой конечную сумму слагаемых вида

$$\frac{\partial^n f(\bar{x}^0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}^0))}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_m} x_m} dx_1^{k_1} \dots dx_m^{k_m} = \frac{\partial^n f(\bar{x}^0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}^0))}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_m} x_m} (\Delta x_1)^{k_1} \dots (\Delta x_m)^{k_m},$$

$$0 < \theta < 1, k_1 + \dots + k_m = n.$$

По условию теоремы, все производные до порядка n включительно непрерывны в окрестности, поэтому применима теорема 4 и, кроме того, непрерывность означает, что

$$\frac{\partial^n f(\bar{x}^0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}^0))}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_m} x_m} = \frac{\partial^n f(\bar{x}^0)}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_m} x_m} + \gamma_{k_1, \dots, k_m}(\bar{x} - \bar{x}^0),$$

где

$\gamma_{k_1, \dots, k_m}(\bar{x} - \bar{x}^0) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow \bar{x}^0$. Таким образом, $d^n f(\bar{x}^0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}^0))$ можно представить в виде $d^n f(\bar{x}^0)$ и суммы конечного числа слагаемых вида

$\gamma_{k_1, \dots, k_m}(\bar{x} - \bar{x}^0)(\Delta x_1)^{k_1} \dots (\Delta x_m)^{k_m}$. Так как

$k_1 + \dots + k_m = n$ и $|\Delta x_i| = |x_i - x_i^0| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2}, i = 1, \dots, m$, каждое слагаемое

$\gamma_{k_1, \dots, k_m}(\bar{x} - \bar{x}^0)(\Delta x_1)^{k_1} \dots (\Delta x_m)^{k_m}$ представляет собой $o\left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2}\right)^n\right)$,

при $\bar{x} \rightarrow \bar{x}^0$. Это верно и для суммы конечного числа таких слагаемых. ◀

Билет 19. Экстремумы функций нескольких переменных

Определение 1. Пусть $f(\bar{x})$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $\bar{x}_0$ - *точка минимума* (строгого), если для всех $\bar{x}$ из некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(\bar{x}_0)$ выполнено неравенство $f(\bar{x}) > f(\bar{x}_0)$. Точка $\bar{x}_0$ - *точка максимума*, если для всех $\bar{x}$ из некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(\bar{x}_0)$ выполнено неравенство $f(\bar{x}) < f(\bar{x}_0)$. Точки минимума и максимума обычно называются *точками экстремума*.

Теорема 1. Если $\bar{x}_0$ - точка экстремума и существует $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим точки, у которых все координаты, кроме i -ой фиксированы и равны координатам точки $\bar{x}_0$, а координата x_i меняется. Тогда функцию $f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$ можно рассматривать, как функцию от x_i . Для этой функции x_i^0 является точкой экстремума и в ней существует производная. Поэтому производная функции $f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$ в точке x_i^0 равна 0. Вместе с тем она, по определению, есть $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$. Теорема доказана.

Замечание. В точке экстремума частные производные могут и не существовать.

Пример. Пусть $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Эта точка, очевидно, точка минимума, т.к. если хотя бы одно из чисел x, y отлично от 0, то величина $z > 0$. Но $z(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$ и $z(0, y) = \sqrt{y^2} = |y|$, поэтому частные производные в точках $x = 0$ и $y = 0$ не существуют.

Замечание. Если все частные производные в точке экстремума $\bar{x}_0$ существуют, то все они равны 0 и $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$, а также $df(\bar{x}_0) \equiv 0$, как функция от $dx_1, \dots, dx_n$.

Замечание. В точке экстремума дифференцируемой функции $z(x, y)$ касательная плоскость параллельна плоскости OXY .

■ Достаточные условия экстремума.

Изложим схему исследования функции $f(\bar{x})$ на экстремум. Прежде всего, найдем стационарные точки $\bar{x}_0$, т.е. такие, что все частные производные в них равны нулю, что равносильно условиям $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$ (или условию, что первый дифференциал представляет собой нулевую форму, т.е. $df(\bar{x}_0) = 0$).

Теорема 2. Если функция $f(\bar{x})$ имеет частные производные до 2-го порядка включительно, непрерывные в стационарной точке $\bar{x}_0$, а второй дифференциал функции $d^2 f(\bar{x}_0)$ представляет собой знакоопределённую квадратичную форму от переменных $dx_1, \dots, dx_n$, то точка $\bar{x}_0$ является точкой экстремума функции $f(\bar{x})$. При этом, если эта квадратичная форма положительно определена, то в

точке $\bar{x}_0$ – минимум, а если она отрицательно определена, то – максимум. Если форма неопределенная (т.е. меняет знак), то экстремума нет.

► Применим к функции $f(\bar{x})$ в стационарной точке $\bar{x}^0$ теорему 4 билета 18 с $n = 2$, учитывая, что $df(\bar{x}^0) = 0$:

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}^0) = df(\bar{x}^0) + \frac{d^2 f(\bar{x}^0)}{2} + o\left(\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2\right) = \frac{d^2 f(\bar{x}^0)}{2} + o\left(\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2\right),$$

где $\bar{x} \rightarrow \bar{x}^0$.

Второй дифференциал $d^2 f(\bar{x}^0)$ представляет собой квадратичную форму от переменных $h_1, \dots, h_m$ и, следовательно, непрерывную функцию от этих переменных. Он определён при любом наборе переменных $h_1, \dots, h_m$.

Рассмотрим такой набор, что $h_1^2 + \dots + h_m^2 = 1$, т.е. точку $(h_1, \dots, h_m)$, лежащую на единичной сфере в пространстве $\mathbb{R}^m$. Единичная сфера – компактное множество пространства $\mathbb{R}^m$, поэтому непрерывная функция – второй дифференциал $d^2 f(\bar{x}^0)$ – достигает на ней своего наибольшего и наименьшего значений. Пусть, для определённости, второй дифференциал $d^2 f(\bar{x}^0)$ является положительно определённой квадратичной формой, тогда обозначим его наименьшее значение на единичной сфере буквой $\mu, \mu > 0$.

Рассмотрим величину, $\beta(\Delta\bar{x}) \sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2$ подразумеваемую символом $o\left(\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2\right)$ и обозначим $\Delta x_i = x_i - x_i^0, i = 1, \dots, m$. При $\bar{x} \rightarrow \bar{x}^0$, $\beta(\Delta\bar{x}) \rightarrow 0$. Поэтому существует такое число $\delta > 0$, что для всех $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ таких, что

$$\sum_{i=1}^m (\Delta x_i)^2 < \delta, \quad (2)$$

имеет место неравенство

$$|\beta(\Delta\bar{x})| < \frac{\mu}{2}. \quad (3)$$

Вычислим значение $d^2 f(\bar{x}^0)$ при значениях переменных $h_1, \dots, h_m$, равных, соответственно, $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, удовлетворяющих неравенству (2) и условию $\Delta\bar{x} \neq \bar{0}$. Так как второй дифференциал – однородная форма второй степени, при переходе от набора переменных $(h_1, \dots, h_m)$ к набору $(th_1, \dots, th_m)$, значение второго дифференциала умножится на t^2 . Рассматривая его значение для точки

$$\left(\frac{\Delta x_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\Delta x_i)^2}}, \dots, \frac{\Delta x_m}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\Delta x_i)^2}} \right),$$

лежащей на единичной сфере, получаем, что оно

больше, чем μ . Следовательно, значение второго дифференциала при значениях переменных $h_1, \dots, h_m$, равных, соответственно, $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, больше, чем $\mu \sum_{i=1}^m (\Delta x_i)^2$. В то же время, из равенства (1) и неравенства (3) следует, что для значений переменных $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, удовлетворяющих неравенствам (2), приращение функции $f(\bar{x}) - f(\bar{x}^0) > 0$ и точка $\bar{x}^0$ – точка минимума. ◀

Для выяснения вопроса определённости формы можно использовать критерий Сильвестра из курса линейной алгебры. Для этого следует рассмотреть определитель (гессиан)

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

где f_{ij} обозначают производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0)$ и его главные миноры, т.е. числа f_{11} ,

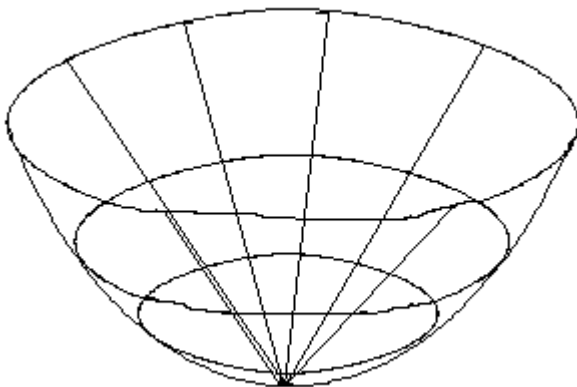
$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если все эти миноры положительные, то $\bar{x}^0$ — точка минимума.

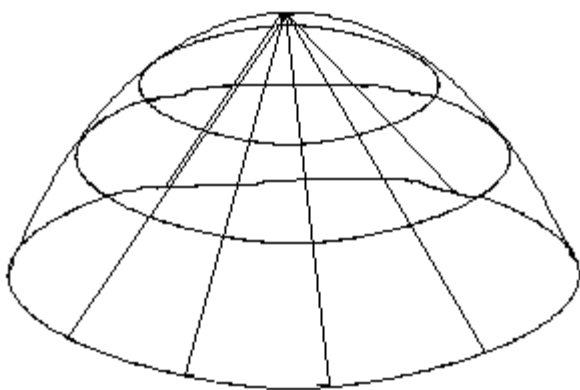
Если знаки этих миноров чередуются, начиная со знака «-», то $\bar{x}^0$ — точка максимума.

В задачах часто встречается следующее правило исследования функции двух переменных. В критической точке, при условии непрерывности смешанных производных, вычисляются величины $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и рассматривается $AC - B^2$. Если $A > 0$, $AC - B^2 > 0$, то в критической точке — минимум, если $A < 0$, $AC - B^2 > 0$ — то максимум. Это сразу следует из сформулированного выше правила исследования знаков главных миноров матрицы второго дифференциала.

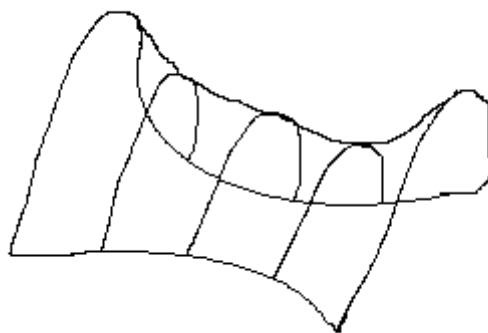
В двумерном случае имеем геометрическую иллюстрацию. В окрестности точки экстремума график функции $z = z(x, y)$ имеет вид «почти» эллиптического параболоида: в случае точки минимума выпуклого вниз,



в случае точки максимума выпуклого вверх.



Если же график функции $z = z(x, y)$ имеет вид «почти» гиперболического



параболоида (седло), то экстремума нет.

■Метод наименьших квадратов.

Пусть на основании эксперимента необходимо установить функциональную зависимость между переменными величинами x и y . Мы ограничимся рассмотрением случая линейной зависимости $y = ax + b$. Задача состоит в том, чтобы для заданных пар точек $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ подобрать коэффициенты a, b так, чтобы минимизировать величину $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$, которую дальше обозначаем $S(a, b)$.

Сначала найдём критические точки $S(a, b)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - (ax_i + b)) = 0, \\ \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) = 0. \end{cases}$$

Перепишем эту систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i x_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + bn. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) называется *нормальной системой метода наименьших квадратов*.

Из нее мы находим числа a, b .

Для разрешимости системы (4) требуется условие

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Лемма. Величина этого определителя равна $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)^2$ и, следовательно, больше 0.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

Правая часть этого равенства равна

$$\begin{aligned} n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2x_1x_2 + \dots + 2x_1x_n + 2x_2x_3 + \dots + 2x_2x_n + \dots + 2x_{n-1}x_n) = \\ = (n-1)x_1^2 + \dots + (n-1)x_n^2 - 2(x_1x_2 + \dots + x_1x_n) - 2(x_2x_3 + \dots + x_2x_n) - \dots - 2x_{n-1}x_n. \end{aligned}$$

Эту сумму легко сгруппировать и получить $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)^2$.

Таким образом, система (4) имеет решение a, b . Чтобы проверить, что функция $S(a, b)$ действительно имеет минимум в точке (a, b) , вычислим

$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2$, $\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i$, $\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n$. Следовательно, главные миноры определителя

$$\begin{vmatrix} 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 & 2 \sum_{i=1}^n x_i \\ 2 \sum_{i=1}^n x_i & 2n \end{vmatrix}, \text{ т.е. число } 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{ и сам определитель, положительны, поэтому}$$

найденная точка – точка минимума.

Задача. Найти $d^2(e^{x^2+y^2})$.

Решение. $\frac{\partial e^{x^2+y^2}}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial e^{x^2+y^2}}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{x^2+y^2} = (4x^2 + 2)e^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x^2+y^2} = (4y^2 + 2)e^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{x^2+y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} e^{x^2+y^2} = 4xye^{x^2+y^2}$.

Следовательно, $d^2(e^{x^2+y^2}) = (4x^2 + 2)e^{x^2+y^2} dx^2 + 8xye^{x^2+y^2} dx dy + (4y^2 + 2)e^{x^2+y^2} dy^2$.

Задача. Выписать формулу для третьего дифференциала функции $f(x, y)$.

Решение. Используем формулу (10) при $n = 2$ и $k = 3$. Получим $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$.

Билет 20. неявная функция

■ Теорема о неявной функции, определённой уравнением $F(x, y) = 0$

Термин «неявная функция» относится к способу задания функциональной зависимости между переменными и в простейшем случае двух переменных x и y и означает, что вместо явной формулы $y = f(x)$ эта зависимость представлена уравнением $F(x, y) = 0$.

Следует отметить, что уравнение $F(x, y) = 0$ не всегда определяет функцию $y = f(x)$. Уравнение, не содержащее переменную y , например, $F(x) = 0$, функцию $y = f(x)$ не определяет. Кроме того, уравнение $F(x, y) = 0$ не всегда позволяет однозначно выразить y через x . Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$, задающее окружность на плоскости, определяет при $-1 \leq x \leq 1$, две непрерывные функции $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$.

В этом примере можно, например, дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $y \geq 0$. Тогда мы получим только $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$.

В следующей теореме установлены условия, при которых существует единственная функция $y = f(x)$, задаваемая неявным уравнением.

Теорема 1. Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна вместе с частными

производными $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ в окрестности $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такой, что

выполнены условия $F(x_0, y_0) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существуют

положительные числа ε и δ такие, что на множестве $|x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq \varepsilon$ уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно уравнению $y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывная и

дифференцируемая на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ функция, и её производную можно

$$\text{вычислить по формуле } f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Замечание 1. Равносильность уравнений $F(x, y) = 0$ и $y = f(x)$ означает, что уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно определяет в рассматриваемой области функцию $y = f(x)$, для которой на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$.

Замечание 2. Часто бывает полезной такая трактовка теоремы 1. Рассматривается задача: зная, что $F(x, y) = 0$, где функция $F(x, y)$ обладает непрерывными частными производными, найти $\frac{dy}{dx}$. Дифференцируя это

уравнение, получаем $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$. Преобразовывая это уравнение,

получаем, что если $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, то $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$. Теорема о неявной функции позволяет

утверждать, что левая часть этого равенства представляет собой не просто отношение дифференциалов независимых переменных, а производную функции, определённой уравнением $F(x, y) = 0$.

▼ По условию, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть, для определенности, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Ввиду

непрерывности $\frac{\partial F}{\partial y}$, это неравенство выполняется при всех (x, y) из некоторой

окрестности точки (x_0, y_0) .

Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $F(x_0, y)$ обладает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ положительной производной и, значит, возрастает.

Поскольку $F(x_0, y_0) = 0$, из этого следует, что при $y_0 - \varepsilon \leq y \leq y_0$ функция

$F(x_0, y) < 0$, а при $y_0 \leq y \leq y_0 + \varepsilon$ выполнено: $F(x_0, y) > 0$ (см. рис.).

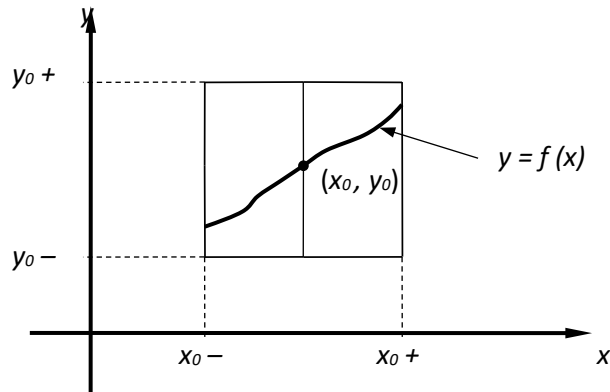


Рис.

$F(x, y)$ – непрерывна и поэтому сохраняет знак в некоторой окрестности любой точки, где она положительна или отрицательна.

Значит, можно выбрать δ так, чтобы

$$\begin{cases} F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \\ F(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \\ x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \end{cases}.$$

При любом фиксированном $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ функция $F(x, y)$ возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. При этом $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$. Поэтому существует, притом единственное, значение y такое, что $F(x, y) = 0$. Это значение соответствует точке x , что задаёт функцию: $y = f(x)$.

Таким образом, существование единственной функции $f(x)$, для которой $F(x, f(x)) \equiv 0$, при $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, доказано.

Докажем непрерывность $f(x)$ в точке x_0 . Для любого ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$, можно повторить предыдущие рассуждения и найти число δ_0 так, что на множестве $|x - x_0| < \delta_0$, $|y - y_0| < \varepsilon_0$ уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно уравнению $y = f(x)$.

Это означает, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta_0 > 0$, для которого при

$|x - x_0| < \delta_0$ выполняется неравенство $|y - y_0| < \varepsilon_0$, или $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$, что и означает непрерывность $f(x)$ в точке x_0 .

Заменяя в этом рассуждении точку (x_0, y_0) произвольной точкой $(\tilde{x}, \tilde{y})$, лежащей в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) и такой, что $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, получаем, что функция $f(x)$ непрерывна на всем интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Докажем дифференцируемость $f(x)$ на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Для этого выберем произвольную точку $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и соответствующую ей точку $y = f(x)$, определяемую уравнением $F(x, y) = 0$. Пусть Δx — приращение аргумента, не выводящее за пределы рассматриваемого интервала, и Δy — соответствующее приращение y , для которого выполняется уравнение $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$. Так как $F(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) , а точки (x, y) и $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ принадлежат этой окрестности, то

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \quad (1)$$

где $\alpha, \beta \rightarrow 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

По доказанной непрерывности функции $f(x)$, из условия $\Delta x \rightarrow 0$ следует, что также и $\Delta y \rightarrow 0$. Поэтому $\alpha, \beta \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Из равенства (1) следует, что $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + \beta\right) \cdot \Delta y = \left(-\frac{\partial F}{\partial x} - \alpha\right) \cdot \Delta x$. Так как

$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, при достаточно малых Δx коэффициент при Δy отличен от нуля и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + \beta}. \quad \text{Значит, существует } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad \text{Теорема}$$

доказана. ▲

■ **Теорема о неявной функции, определённой уравнением** $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$

Теорема 2. Пусть функция $F(x_1, \dots, x_n, y)$ непрерывна и имеет все непрерывные частные производные в окрестности точки $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$ такой, что

$F(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0$, причем $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0$. Тогда существуют числа

$\delta_1, \dots, \delta_n, \varepsilon$ такие, что в области $|x_i - x_i^0| \leq \delta_i, y = f(x_1, \dots, x_n)$, где функция $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные,

причём
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n)}.$$

Задача. Найти $\frac{dy}{dx}$, если переменные (x, y) связаны уравнением $y = 1 + y^x$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $y = 1 + e^{x \ln y}$ и продифференцируем обе его части: $y' = e^{x \ln y} \left(\ln y + x \frac{y'}{y} \right)$, откуда $y' \left(1 - y^x \frac{x}{y} \right) = y^x \ln y, y' (1 - xy^{x-1}) = y^x \ln y$ и в точках $(x, y), y > 0$ таких, что $1 - xy^{x-1} \neq 0$ получаем $y' = \frac{y^x \ln y}{(1 - xy^{x-1})}$. Обратите внимание! Выражение в правой части этого равенства содержит обе переменные x, y .

Задача. Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, если переменные (x, y) связаны уравнением $y = x + \ln y$.

Решение. $y' = 1 + \frac{y'}{y}$, откуда $y' = \frac{y}{y-1} = 1 + \frac{1}{y-1}$. Дифференцируя это

уравнение, получаем $y'' = -\frac{1}{(y-1)^2} \cdot y' = -\frac{y}{(y-1)^3}$ и эта формула верна для любого $y > 0, y \neq 1$.

Билет 21. Система неявных функций

Теорема 1. Пусть

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

где функции x , y , z непрерывны и имеют непрерывные производные в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ (точки $(u, v) \in D$). Пусть матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ имеет в этой области ранг 2. Тогда, если, например, минор}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ то в области } D \text{ систему можно преобразовать к уравнению}$$

$$z = z(x, y), \quad x, y \in \Delta, \quad (2)$$

где z есть непрерывно дифференцируемая функция от x , y в области Δ и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}. \quad (3)$$

Можно сформулировать общую теорему для системы функций $F_i(\bar{x}, \bar{y}), i = 1, \dots, m, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 2. Пусть функции $F_i(\bar{x}, \bar{y}), i = 1, \dots, m, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$ непрерывны и имеют непрерывные производные в окрестности точки $(\bar{x}^0, \bar{y}^0) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Обозначим

$$F'_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, F'_{\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что

$$F_i(\bar{x}^0, \bar{y}^0) = 0, i = 1, \dots, m, \quad |F'_{\bar{y}}(\bar{x}^0, \bar{y}^0)| \neq 0.$$

Тогда существуют окрестности точек $U(\bar{x}^0) \subset \mathbb{R}^n, V(\bar{y}^0) \subset \mathbb{R}^m$ такие, что на их декартовом произведении $U(\bar{x}^0) \times V(\bar{y}^0) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ система уравнений $F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0, i = 1, \dots, m$ равносильна системе уравнений $y_i = f_i(\bar{x}), i = 1, \dots, m$, где $f_i(\bar{x}), i = 1, \dots, m$ — непрерывно дифференцируемые в окрестности $U(\bar{x}^0)$ функции, причём

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = - \left(F'_{\bar{y}}(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x})) \right)^{-1} \cdot F'_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x})),$$

где, как обычно, $\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \dots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}.$

■Геометрическая иллюстрация к теореме 1

Ограничимся графической иллюстрацией этой теоремы.

Уравнения (2) определяют в $\mathbb{R}^3$ некоторую поверхность S и называются параметрическими уравнениями этой поверхности. Теорема утверждает, что поверхность S есть график функции $z = z(x, y)$ (3). Обычно принято

обозначать $\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$, и $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ и уравнения (1) принимают вид $\vec{r} =$

$$\vec{r}(u, v)$$

Если зафиксировать v_0 , то $\vec{r}(u, v_0)$ – уравнение координатной линии на S (аналогично, $\vec{r}(u_0, v)$ при фиксированном значении u_0 также представляет собой уравнение координатной линии на S). Векторы $\vec{r}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$ и

$\vec{r}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ – касательные векторы к координатным линиям. Если взять точку поверхности, соответствующую параметрам (u_0, v_0) и рассмотреть касательную плоскость в этой точке, то векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ лежат в этой

плоскости. Если ранг матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ равен 2, это означает, что $\vec{r}_u$

и $\vec{r}_v$ не параллельны и их векторное произведение представляет собой нормальный вектор к касательной плоскости и

$$\begin{aligned} \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}, \end{aligned} \tag{4}$$

где буквы A , B , C обозначают соответствующие определители. В этих

обозначениях формулы (3) принимают вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C},$$

а единичный вектор $\vec{n}$ нормали (4), получаемый при делении вектора на его модуль $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, равен

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right).$$

Преобразуем выражение $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$. По определению векторного произведения, $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cdot |\sin \phi|$, где ϕ – угол между $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Тогда

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= (\vec{r}_u)^2 (\vec{r}_v)^2 \sin^2 \phi = (\vec{r}_u)^2 (\vec{r}_v)^2 (1 - \cos^2 \phi) = \\ &= (\vec{r}_u)^2 (\vec{r}_v)^2 - ((\vec{r}_u)(\vec{r}_v) \cos \phi)^2 = (\vec{r}_u)^2 (\vec{r}_v)^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2 = EG - F^2, \end{aligned}$$

$$\text{где } E = (\vec{r}_u)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad G = (\vec{r}_v)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Задача. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$.

Решение. Предлагаемый вариант решения запомнить легче, чем формулы (3)

теоремы 1. Найдём дифференциал функции z , как в переменных u, v , так и в

переменных x, y : $dz = 0 \cdot du + 1 \cdot dv = dv, dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} (\cos v du - u \sin v dv) + \frac{\partial z}{\partial y} (\sin v du + u \cos v dv)$. Приравнявая коэффициенты при du

и dv , получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial z}{\partial x} \cos v + \frac{\partial z}{\partial y} \sin v \\ 1 = -\frac{\partial z}{\partial x} u \sin v + \frac{\partial z}{\partial y} u \cos v \end{cases}, \text{ решая которую}$$

находим $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin v}{u}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos v}{u}.$

Билет 22. Условный экстремум

■ Определение условного экстремума

Пусть дана функция $f(x_1, \dots, x_{n+m})$ и предположим, что переменные $x_1, \dots, x_{n+m}$ удовлетворяют уравнениям, которые мы будем называть *уравнениями связи*

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0, i = 1, \dots, m. (1).$$

Определение 1. В точке $(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$, удовлетворяющей уравнениям (1), функция $f(x_1, \dots, x_{n+m})$ имеет *условный минимум (максимум)*, если неравенство $f(x_1, \dots, x_{n+m}) \leq f(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$ ($f(x_1, \dots, x_{n+m}) \geq f(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$) выполняется в некоторой окрестности точки M_0 для всех точек $(x_1, \dots, x_{n+m})$ этой окрестности, удовлетворяющих условиям (1).

Замечание. Нахождение условного экстремума – часто встречающаяся задача. Обычно уравнения связи, или совокупности таких уравнений, задают границу рассматриваемой области, и требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции на этой границе.

В случае функции одной переменной задача имеет простой аналог. Пусть мы ищем наибольшее значение этой функции на отрезке. Сначала находим нули производной на интервале, затем рассматриваем её значения в концах отрезка, т.е. на границе области.

В случае, например, функции двух переменных, рассматриваемой на плоской области, ограниченной совокупностью кривых, при отыскании её наибольшего и наименьшего значений на границе области мы получаем пример задачи с условным экстремумом. (Отметим, что здесь мы используем интуитивное представление о том, что такое кривая на плоскости. Мы можем представлять себе кривую составленной из нескольких графиков дифференцируемых функций $y = y(x)$ или $x = x(y)$.)

■Необходимые условия условного экстремума

Для упрощения выкладок при сохранении содержательности задачи, рассмотрим случай функции $f(x, y, z, t)$ и двух уравнений связи $F(x, y, z, t) = 0$, $G(x, y, z, t) = 0$.

Предположим, что функции f, F, G обладают непрерывными частными

производными, причем ранг матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{pmatrix}$ равен 2. Для

определенности, пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда, по теореме о системе неявных

уравнений, уравнения связи можно решить, выразив переменные z, t в виде функций от x, y : $z = z(x, y)$, $t = t(x, y)$, где z, t — непрерывно дифференцируемые функции и условный экстремум функции $f(x, y, z, t)$ совпадает с экстремумом функции $f(x, y, z(x, y), t(x, y)) = \phi(x, y)$. Поэтому дифференциал этой функции $f(x, y, z(x, y), t(x, y)) = \phi(x, y)$ — тождественно равная нулю функция от dx, dy , т.е. должно выполняться условие $d\phi(x, y) = 0$, равносильное тому, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,$$

иными словами,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = 0. \quad (2).$$

Для нахождения $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ продифференцируем уравнения связи

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz + \frac{\partial G}{\partial t} dt = 0 \end{cases} \quad (3).$$

Из этой системы можно линейно выразить dz и dt через dx и dy , что и дает искомые выражения для величин $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$, так как

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, dt = \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2), получаем систему для нахождения точек, в которых может быть условный экстремум.

■ Метод множителей Лагранжа

Есть, однако, замечательный прием, называемый *методом неопределенных множителей Лагранжа*, который позволяет обойтись без нахождения решения системы (2). Изложим этот метод.

По инвариантности формы дифференциала, условие $d\phi(x, y) = 0$ (или условие (2)) равносильно условию $df(x, y, z, t) = 0$, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \quad (4).$$

Умножим уравнения (3) на некоторые числа λ и μ (которые как раз являются неопределёнными множителями Лагранжа) соответственно и сложим с (4):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} + \mu \frac{\partial G}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} + \mu \frac{\partial G}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} + \mu \frac{\partial G}{\partial z} \right) dz + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial G}{\partial t} \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (5).$$

Выберем λ и μ так, чтобы коэффициенты при dz и dt одновременно обращались в 0. Это можно сделать потому, что определитель системы

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial F}{\partial z} + \mu \frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z} \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial t} \end{cases} \quad (6)$$

не равен 0.

Тогда (5) примет вид $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} + \mu \frac{\partial G}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} + \mu \frac{\partial G}{\partial y}\right)dy = 0$, где dx, dy –

дифференциалы независимых переменных. Поэтому и

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} + \mu \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} + \mu \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, необходимые условия экстремума вспомогательной функции

$L(x, y, z, t, \lambda, \mu) = f(x, y, z, t) + \lambda F(x, y, z, t) + \mu G(x, y, z, t)$ т.е. уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0.$$

совпадают с уравнениями (7) и (6) и уравнениями связи, тем самым, с

необходимыми условиями условного экстремума. Функция $L(x, y, z, t, \lambda, \mu)$

называется *функцией Лагранжа* для этой задачи. В общем случае дадим такое определение:

Определение 2. Функция $L(x_1, \dots, x_{n+m}, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(x_1, \dots, x_{n+m}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \Phi_i(x_1, \dots, x_{n+m})$ называется *функцией Лагранжа* для задачи об экстремуме функции $f(x_1, \dots, x_{n+m})$ при условиях (1), т.е. $\Phi_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0, i = 1, \dots, m$. Числа $\mu_i, i = 1, \dots, m$ называются *неопределёнными множителями Лагранжа*.

Теорема 1. Необходимым условием того, что точка $(x_1; \dots; x_{n+m})$ является решением задачи об экстремуме функции $f(x_1, \dots, x_{n+m})$ при условиях (1), т.е.

$\Phi_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0, i = 1, \dots, m$, являются уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, n + m, \Phi_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0, i = 1, \dots, m.$$

Достаточным условием экстремума является знакоопределённость второго

дифференциала функции Лагранжа при условии, что дифференциалы

переменных $dx_i, i = 1, \dots, n + m$, связаны уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Необходимость доказана выше, в частном случае для функции от четырёх переменных с двумя уравнениями связи.

■ Достаточные условия экстремума. Окаймлённый гессиан

Для простоты изложения ограничимся функцией $f = f(x_1, x_2)$ от двух переменных, подчиненных условию $g(x_1, x_2) = 0$. Предполагаем, что функции f, g обладают непрерывными производными до второго порядка включительно и обозначаем, например, $g_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$, $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и т.п. Для нахождения точки, в

которой возможен условный экстремум, используем метод множителей Лагранжа, описанный выше. Строим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2).$$

(отметим, что иногда пишут $f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2)$). Никакой разницы это не даст, т.к. уравнение $g(x_1, x_2) = 0$ равносильно уравнению $-g(x_1, x_2) = 0$).

Точки, в которых может быть условный экстремум, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2 + \lambda g_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для того, чтобы выяснить, есть ли экстремум в найденной точке $\bar{x}^o$ (или одной из найденных точек, если система имеет не одно решение), следует использовать второй дифференциал, как и в случае обычного экстремума. Введём в рассмотрение связанный со вторым дифференциалом определитель, иногда называемый *окаймлённым гессианом*:

$$\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. Если в точке, удовлетворяющей уравнениям (8), выполняется

неравенство $\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} > 0$, то в этой точке условный максимум, если же

$\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} < 0$, то в этой точке условный минимум.

Доказательство теоремы 2

Точки, в которых может быть условный экстремум, удовлетворяют системе (8).

Для того, чтобы выяснить, есть ли экстремум в найденной точке $\bar{x}^0$ (или одной из найденных точек, если система имеет не одно решение), следует использовать второй дифференциал, как и в случае обычного экстремума.

Однако в рассматриваемом случае $g(x_1, x_2) = 0$, откуда дифференцируя, находим:

$$g_1 dx_1 + g_2 dx_2 = 0,$$

или, если, например, $g_2 \neq 0$, то

$$dx_2 = -\left(\frac{g_1}{g_2}\right) \cdot dx_1.$$

Кроме того, при условии $g(x_1, x_2) = 0$ рассматриваемая функция $L(x_1, x_2)$ просто совпадает с $f(x_1, x_2)$ и поэтому экстремумы этих функций совпадают. Поэтому далее исследуем на экстремум функцию $L(x_1, x_2)$. Найдём её второй дифференциал.

$$\begin{aligned} d^2L &= L_{11}dx_1^2 + 2L_{12}dx_1dx_2 + L_{22}dx_2^2 = \left(L_{11} + 2L_{12} \cdot \left(-\frac{g_1}{g_2}\right) + L_{22} \cdot \left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 \right) dx_1^2 = \\ &= \left(L_{11}g_2^2 - 2L_{12}g_1g_2 + L_{22}g_1^2 \right) \frac{dx_1^2}{g_2^2} \end{aligned}$$

Итак, знак d^2L (при условии, что переменные x_1, x_2 связаны уравнением

$g(x_1, x_2) = 0$, откуда $dx_2 = -\left(\frac{g_1}{g_2}\right)dx_1$) совпадает со знаком величины

$$L_{11}g_2^2 - 2L_{12}g_1g_2 + L_{22}g_1^2 \quad (9)$$

Для удобства запоминания рассмотрим определитель (окаймленный гессиан) и его разложение по первой строке

$$\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= -g_1 \begin{vmatrix} g_1 & L_{12} \\ g_2 & L_{22} \end{vmatrix} + g_2 \begin{vmatrix} g_1 & L_{11} \\ g_2 & L_{12} \end{vmatrix} = -g_1^2 L_{22} + L_{12} g_1 g_2 + g_1 g_2 L_{12} - g_2^2 L_{11} =$$

$$= -(g_1^2 L_{22} - 2L_{12} g_1 g_2 + g_2^2 L_{11}) \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10) видим, что в рассматриваемой задаче знак второго дифференциала противоположен знаку окаймленного гессиана.

Задача. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии $x + y = 1$.

Решение. 1-й способ. Выразив $y = 1 - x$, получим $z = x(1 - x) = x - x^2$. Это – квадратичная функция и она достигает своего максимума в вершине, при $x = \frac{1}{2}$.

При этом $z = \frac{1}{4}$.

2-й способ. Функция Лагранжа равна $L = xy - \mu(x + y - 1)$. Её производные равны 0, т.е.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y - \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x - \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = x + y - 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $x = y = \mu = \frac{1}{2}$. Исследуем второй дифференциал

функции L .
$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 0 \cdot dx^2 + 2 dx dy + 0 \cdot$$

$dy^2 = 2dxdy$. Здесь необходимо учесть, что из уравнения связи следует, что $dx + dy = 0, dy = -dx$ и $d^2L = -2 dx^2 < 0$, поэтому в точке $x = y = \frac{1}{2}$ имеем условный экстремум.