МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ
ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

(для бакалавриата)

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок, создаваемых на основе требований нового учебного плана – облегчить самостоятельную работу иностранных студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Напомним свойства и дополнительные определения, связанные с ***определенным интегралом***. Предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на рассматриваемых промежутках.

1) Если $a > b$, то по определению, полагаем $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Заметим, что это равенство справедливо и в случае $a < b$, так как тогда $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
2) Также по определению положим $\int_a^a f(x)dx = 0$.
3) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
4) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
5) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
6) Если $f(x) \geq 0$ на $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, то $\int_\mathrm{a}^\mathrm{b} f(x)dx \geq 0$.
7) Если $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
8) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема. ***(Формула Ньютона-Лейбница). Если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{C}([\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}])$, то для любой первообразной $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ имеет место равенство***

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}).$$

Задача 1. По определению посчитать $\int_a^b xdx$.

Решение.

Рассмотрим разбиение отрезка $[a; b]$ точками $x_k = \left\{a + \frac{b-a}{n}k\right\}_{k=0}^{n}$ (этими точками отрезок $[a; b]$ разбивается на n равных отрезков).

Тогда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = a + \frac{b-a}{n}k - \left(a + \frac{b-a}{n}(k-1)\right) = \frac{b-a}{n}$.

И пусть $\xi_k = x_k$.

Для интегральной суммы получим выражение

$$S(f,T)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=$$

$$=a(b-a)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1+\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=a(b-a)\cdot\frac{1}{n}\cdot n+\frac{(b-a)^2}{n^2}\left(\frac{1+n}{2}\cdot n\right)=$$

$$=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\ \Rightarrow$$

$$\lim_{d(\lambda)\to 0}S(f,T)=\lim_{d(\lambda)\to 0}\left(a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=ab-a^2+\frac{a^2+b^2-2ab}{2}=$$

$$=\frac{2ab-2a^2+a^2+b^2-2ab}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Заметьте, что мы рассмотрели самое простое разбиение и не доказали, что предел не зависит от выбора разбиения и выбора точек $\{\xi_k\}$. А по формуле Ньютона – Лейбница мы легко получим

$$\int_a^b x dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Оцените и испытайте чувство благодарности к великим математикам прошлого!..

Задача 2. Использовав формулу Ньютона – Лейбница, вычислить $\int_1^3 (x^2-2x+3)\,dx$.

Решение.

$$\int_1^3 (x^2-2x+3)\,dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\right|_1^3=$$

$$=(9-9+9)-\left(\frac{1}{3}-1+3\right)=9-2-\frac{1}{3}=6\frac{2}{3}.$$

Ответ: $6\frac{2}{3}$.

Задача 3. Использовав формулу Ньютона – Лейбница, вычислить $\int_0^\pi (2x+\sin 2x)\,dx$.

Решение.

$$\int_0^\pi (2x+\sin 2x)\,dx=\int_0^\pi 2x\,dx+\int_0^\pi \sin 2x\,dx=x^2|_0^\pi-\frac{1}{2}\cos 2x|_0^\pi=$$

$$=\pi^2-0-\frac{1}{2}(\cos 2\pi-\cos 0)=\pi^2-\frac{1}{2}(1-1)=\pi^2.$$

Ответ: π^2.

Задача 4. Использовав формулу Ньютона – Лейбница, вычислить $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{2x-3}$.

Решение.

$$\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int_{-5}^{-2} \frac{d(2x-3)}{2x-3} = \frac{1}{2}\left(\ln|2x-3|\right)\Big|_{-5}^{-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|-4-3| - \ln|-10-3|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|-7| - \ln|-13|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln 7 - \ln 13\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{7}{13}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{13}$.

Задача 5. Использовав формулу Ньютона – Лейбница, вычислить $\int_{1}^{e} \frac{\left(x-\sqrt{x}\right)dx}{x\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int_{1}^{e} \frac{\left(x-\sqrt{x}\right)dx}{x\sqrt{x}} \boxed{=}$$

Поделим «почленно» числитель на знаменатель, получим

$$\boxed{=} \int_{1}^{e} \left(\frac{x}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)dx = \int_{1}^{e}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)dx = 2\sqrt{x}\Big|_{1}^{e} - \ln|x|\Big|_{1}^{e} =$$

$$= 2\sqrt{e} - 2 - \ln e + \ln 1 = 2\sqrt{e} - 2 - 1 + 0 = 2\sqrt{e} - 3.$$

Ответ: $2\sqrt{e} - 3$.

Задача 6. Использовав формулу Ньютона – Лейбница, вычислить $\int_{1}^{5} \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_{1}^{5} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{1}^{5} \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{1}^{5} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x^2|\right)\Big|_{1}^{5} = \frac{1}{2}\left(\ln 26 - \ln 2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 13.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln 13$.

В дальнейшем мы не будем напоминать об использовании формулы Ньютона – Лейбница.

Задача 7. Вычислить $\int_1^2 \frac{(x+2)\,dx}{3-x}$.

Решение.

$$\int_1^2 \frac{(x+2)\,dx}{3-x} = -\int_1^2 \frac{(x+2)\,dx}{x-3} = -\int_1^2 \frac{(x-3+3+2)\,dx}{x-3} = -\int_1^2 \frac{((x-3)+(3+2))\,dx}{x-3} \boxed{=}$$

Поделим «почленно» числитель на знаменатель, получим

$$\boxed{=} -\int_1^2 dx - 5\int_1^2 \frac{dx}{x-3} = -\int_1^2 dx - 5\int_1^2 \frac{d(x-3)}{x-3} = -(2-1) - 5(\ln|x-3|)\Big|_1^2 =$$

$$= -1 - 5(\ln|-1| - \ln|-2|) = -1 + 5\ln 2.$$

Ответ: $-1 + 5\ln 2$.

Замечание. $\int_a^b dx = x|_a^b = b - a \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\int_a^b dx = b - a}}$

Этот результат лучше проанализировать и запомнить.

Задача 8. Вычислить $2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 8x\,dx$.

Решение.

$$2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 8x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 10x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 6x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 10x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{6}(\cos 6x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3} - \cos 0\right) + \frac{1}{6}(\cos\pi - \cos 0) =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{6}(-1-1) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{20} - \frac{1}{3} = \frac{3-20}{60} = -\frac{17}{60}.$$

Ответ: $-\frac{17}{60}$.

В дальнейшем бывает очень полезна следующая теорема.

Теорема. У функций $\sin px$ и $\cos px$, $p > 0$ наименьший период равен $T_0 = \frac{2\pi}{p}$. Если в интегралах $\int_a^b \sin px\,dx$ и $\int_a^b \cos px\,dx$ величина $b - a = \frac{2\pi}{p}n$, $n \in \mathbb{Z}$, то эти интегралы равны 0.

Пример. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sin 12x}_{T_0=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}}\,dx = 0$, так как $\frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{6}\cdot 2$.

Задача 9. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x\, dx$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos x \sin^2 x\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 x) \sin^2 x\, d \sin x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x - \sin^4 x) d \sin x =$$

$$= \left(\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 - 0 = \frac{1}{3\cdot 2\sqrt{2}} - \frac{1}{5\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{7}{60\sqrt{2}}\,.$$

Ответ: $\frac{7}{60\sqrt{2}}$.

Задача 10. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x\, dx$.

Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 x)^2 dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 2x)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}(\sin 4x)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{32}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{16} - 0 + \frac{1}{32}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{\sqrt{3}}{32}\,.$$

Ответ: $\frac{\pi}{16} - \frac{\sqrt{3}}{32}$.

Задача 11. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^2\, x\, dx$.

Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^2\, x\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dx =$$

$$= (\mathrm{tg}\, x)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}\,.$$

Ответ: $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$.

Задача 12. Вычислить $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = -\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\cos\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} =$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 0-(-1) = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 13. Вычислить $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Решение.

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int_1^3 \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \int_1^3 \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+3)\,\Big|_1^3 = \operatorname{arctg}6 - \operatorname{arctg}4.$$

На последних примерах хорошо видно, что не надо торопиться в несложных задачах делать замену переменных, так как она приводит к дополнительным вычислениям и преобразованиям. Рассмотрим пример.

Пример. $\int_{-\frac{2}{5}}^{0} (2+5x)^4\,dx = \frac{1}{5}\int_{-\frac{2}{5}}^{0} (2+5x)^4\,d(2+5x) =$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}(2+5x)^5\,\Bigg|_{-\frac{2}{5}}^{0} = \frac{1}{25}(32-0) = \frac{32}{25}.$$

Или другое решение (использующее замену переменной):

$$\int_{-\frac{2}{5}}^{0} (2+5x)^4\,dx = \left\| \begin{matrix} 2+5x=t \\ dx=\frac{1}{5}dt \\ x=-\frac{2}{5}\Rightarrow t=0 \\ x=0\Rightarrow t=2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{5}\int_0^2 t^4\,dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}t^5\Big|_0^2 = \frac{1}{25}(32-0) = \frac{32}{25}.$$

Интегрирование по частям

В общем случае для использования формулы интегрирования по частям надо проделать следующую работу

$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx =$

$$\boxed{= \int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)} =$$

$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$

Замечание. Пока в последнем интеграле не получен дифференциал dx, интегрирование по частям не закончено.

Задача 14. Вычислить $\int_1^e \ln x\,dx$.

Решение.

$$\int_1^e \underbrace{\ln x}_{u}\,d\,\underbrace{x}_{v} = \ln x \cdot x\Big|_1^e - \int_1^e xd\ln x =$$

$$= (\ln e \cdot e - \ln 1 \cdot 1) - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}dx = e - 0 - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 15. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin x}_{v'}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} xd\cos x = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx =$$

$$= -\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} + 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{\pi}{6} - 0 = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2}$.

Задача 16. Вычислить $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \operatorname{arctg} x \cdot x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,d\operatorname{arctg} x =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 \cdot 1 - \int_0^1 x\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

Теорема. $\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(x)dx} = \begin{cases} \boldsymbol{2\int_0^a f(x)dx}, \text{ если } \boldsymbol{f(x)} - \text{четная на } [\boldsymbol{-a; a}] \\ \boldsymbol{0}, \text{ если } \boldsymbol{f(x)} - \text{нечетная на } [\boldsymbol{-a; a}]. \end{cases}$

Задача 17. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \sin 5x}{\cos 2x + \cos 7x + 4} dx = 0$,

так как рассматривается интеграл по симметричному промежутку от нечетной функции.

Функция $\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos 2x + \cos 7x + 4}$ – нечетная, так как $\sin x + \sin 5x$ – нечетная функция, как сумма двух нечетных функций; $\cos 2x + \cos 7x + 4$ – четная функция, как сумма трех четных функций; $\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos 2x + \cos 7x + 4}$ – нечетная функция, как отношение нечетной и четной функции.

Уравнение относительно интеграла

Задача 17. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx$.

Решение.

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \, d\sin x = e^{2x} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, de^{2x} =$$

$$= e^{\pi} \cdot 1 - 0 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x \, dx = e^{\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \, d\cos x =$$

$$= e^{\pi} + 2e^{2x} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, de^{2x} = e^{\pi} + 2(0 - 1) - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx =$$

$$= \boxed{e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx} \Rightarrow$$

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx = e^{\pi} - 2 \Rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx = \frac{e^{\pi} - 2}{5}.$$

Ответ: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx = \frac{e^{\pi} - 2}{5}$.

Очень важная подстановка

Задача 18. Вычислить $\int_0^{a} x^5 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

Решение.

Сделаем подстановку $x = a\sin t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, которая осуществляет взаимно однозначное соответствие между отрезками $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $x \in [0; a]$. Поэтому

$$\int_0^a x^5\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\| \begin{matrix} x = a\sin t \\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ dx = a\cos t dt \end{matrix} \right\| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^5 \sin^5 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a\cos t\, dt =$$

$$= a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt = a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \sqrt{\cos^2 t} \cos t\, dt =$$

$$= a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\, |\cos t| \cos t\, dt \boxed{=}$$

так как $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos t \geq 0 \Rightarrow |\cos t| = \cos t$

$$\boxed{=}\ a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^5 t\, dt = a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t \sin t\, dt =$$

$$= -a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, (1 - \cos^2 t)^2 d\cos t = -a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2 t + \cos^4 t)\, d\cos t =$$

$$= -a^7 \left(\cos t - \frac{2\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -a^7 \cdot 0 + a^7 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8a^7}{15}.$$

Ответ: $\frac{8a^7}{15}$.

Простейшие применения определенного интеграла

I.1. Площадь между кривыми заданными графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Пусть $f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$. Тогда площадь полученной криволинейной трапеции равна $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Задача 1. Найти площадь между кривыми $y = \sin x$ и $y = 0$ при $-\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Решение. График функции $y = \sin x$ будет лежать выше оси Ox при $-\frac{7\pi}{6} \le x \le -\pi$ и $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ и будет лежать ниже оси Ox при $-\pi \le x \le 0$ (обязательно нарисуйте «картинку»!). Поэтому

$$S = \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} (\sin x - 0)dx + \int_{-\pi}^{0} (0 - \sin x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - 0)dx =$$

$$= \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} (\sin x)dx - \int_{-\pi}^{0} (\sin x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)dx =$$

$$= -\cos x \Big|_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} + \cos x \Big|_{-\pi}^{0} - \cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\left(-1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \big(1 - (-1)\big) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 =$$

$$= 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $4 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Замечание. Хорошо бы осознать и запомнить, что площадь «четвертинки синусоиды» равна 1, действительно

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Задача 2. Найти площадь между кривыми $y = -x^3$ и $y = -9x$.

Решение.

Функции $y = -x^3$ и $y = -9x$ являются нечетными. Поэтому «картинка» (обязательно нарисуйте!) будет центрально симметрична, и площадь искомой фигуры будет равна удвоенной площади части фигуры, например, при $x \ge 0$. Легко найти точки пересечения этих кривых.

Замечание. ***Чтобы найти точки пересечения двух кривых, заданных уравнениями*** $\boldsymbol{\varphi(x, y) = 0}$ ***и*** $\boldsymbol{\phi(x, y) = 0}$ ***, надо решить систему***

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi(x, y) = 0} \\ \boldsymbol{\phi(x, y) = 0}. \end{cases}$$

В нашем случае система имеет вид

$$\begin{cases} y = -x^3 \\ y = -9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 = -9x \\ y = -9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \lor x = -3 \lor x = 3 \\ y = -9x \end{cases}$$

Поэтому

$$S = 2\int_0^3 (-x^3 + 9x)dx = 2\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2}\right)\Big|_0^3 = 2\left(-\frac{3^4}{4} + \frac{9\cdot 3^2}{2} - 0\right) = 2\cdot\frac{3^4}{4} = \frac{81}{2}.$$

Ответ: $\frac{81}{2}$.

Задача 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \arccos x$, $x = -1$, $x = 0$, $y = 1$.

Решение.

Нарисуйте «картинку». Легко видеть, что

$$S = \int_{-1}^{0} (\arccos x - 1)dx = \int_{-1}^{0} \arccos x\, dx - \int_{-1}^{0} dx =$$

$$= \arccos x \cdot x\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} xd \arccos x - \big(0 - (-1)\big) =$$

$$= 0 - \arccos(-1)\cdot(-1) + \int_{-1}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = \pi - 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \pi - 1 - \sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{0} = \pi - 1 - 1 + 0 = \pi - 2.$$

А теперь внимательно посмотрите на «картинку» и постарайтесь увидеть, что площадь искомой фигуры легко найти, если из площади прямоугольника со сторонами 1 и π вычесть площадь прямоугольника со сторонами 1 и 1 и площадь «четвертинки синусоиды», то есть действительно

$$S = 1\cdot\pi - 1\cdot 1 - 1 = \pi - 2.$$

Ответ: $\pi - 2$.

Задача 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = -x^2 + 2x$ и $y = x$.

Решение.

Прежде чем рисовать «картинку», найдем точки пересечения параболы и прямой, для чего решим систему

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \lor x = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \, . \end{cases}$$

В качестве «картинки» мы получили «вырожденную» криволинейную трапецию, то есть трапецию, у которой параллельные стороны «выродились в точки».

$$S = \int_0^1 \big((-x^2 + 2x) - (x)\big)dx = \int_0^1 (-x^2 + x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задача 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = -x^2 + 5x - 6$ и $y = x^2 - 6$.

Решение.

Прежде чем рисовать «картинку», найдем точки пересечения этих двух парабол, для чего решим систему

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 6 \\ \quad y = x^2 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x - 6 = x^2 - 6 \\ \quad y = x^2 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x = 0 \\ y = x^2 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \lor x = \frac{5}{2} \\ y = x^2 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases} \lor \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{4} \, . \end{cases}$$

В качестве «картинки» мы получили «вырожденную» криволинейную трапецию, то есть трапецию, у которой параллельные стороны «выродились в точки».

$$S = \int_0^{\frac{5}{2}} \big((-x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 6)\big)dx = \int_0^{\frac{5}{2}} (-2x^2 + 5x)dx =$$

$$= \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left(-\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{125}{24}.$$

Ответ: $\frac{125}{24}$.

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \operatorname{tg}^2 x$, $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

Решение.

Из соответствующей задаче «картинки» видно, что

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^2 x - 0) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx =$$

$$= \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 1 - 0 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}$.

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x + \ln x$, $x = 1, x = e$, $y = 0$.

Решение.

Из соответствующей задаче «картинки» видно, что

$$S = \int_1^e (x + \ln x - 0) dx = \int_1^e x dx + \int_1^e \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^e + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x d \ln x =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + e \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + e - \int_1^e dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + e - e + 1 = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{e^2+1}{2}$.

Замечание. Площадь фигуры всегда неотрицательна. Если получился отрицательный ответ, надо искать ошибку.

I.2. Площадь сектора в полярных координатах

Если сектор ограничен лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и кривой $r = r(\varphi)$, то

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.}$$

Задача 1. Найти площадь «трехлепестковой розы», то есть площадь фигуры, ограниченной кривой $r = \sin 3\varphi$.

Решение.

Напомним, что точки кривой $r(\varphi) = \sin 3\varphi$ будут находиться только на лучах $\varphi = \varphi_0$, на которых $r(\varphi) \geq 0$.

$r(\varphi) \geq 0 \Leftrightarrow \sin 3\varphi \geq 0 \Leftrightarrow 0 + 2\pi n \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi n \Leftrightarrow \frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. В силу периодичности функции $r(\varphi) = \sin 3\varphi$ достаточно рассмотреть $n = 0,1,2$. Кроме того, при каждом из этих n мы получим одинаковые по площади «лепестки». Поэтому

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\varphi \, d\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - \underbrace{\cos 6\varphi}_{T_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}}\right) d\varphi = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$r_1(\varphi) = a(1 - \cos\varphi)$ – кардиоида

$r_2(\varphi) = a$ – окружность

вне кардиоиды.

Решение.

Нарисуйте «картинку» и убедитесь, что точки фигуры будут при $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - a^2(1 - \cos\varphi)^2) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 1 + 2\cos\varphi - \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\varphi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\cos 2\varphi}_{T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi - 0 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ответ: $2a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$.

Задача 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r(\varphi) = 3(1 + \sin\varphi)$.

Решение.

Заметим, что $r(\varphi) = 3(1+\sin\varphi) \geq 0 \ \ \forall\varphi \in [-\pi;\pi]$. Поэтому$S =$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 9(1+\sin\varphi)^2 d\varphi = \frac{9}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + 2\underbrace{\sin\varphi}_{\text{нечет}} + \sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\cos 2\varphi}_{T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi}\right)d\varphi = \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi = \frac{27\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{27\pi}{2}$.

I.3. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически

$\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \end{cases}$, $\boldsymbol{y(t) \geq 0}$, $\boldsymbol{a = x(t_1)}$, $\boldsymbol{b = x(t_2)}$,

причем $\boldsymbol{x \in [a;b]}$, $\boldsymbol{t\colon t_1 \to t_2}$. ***Тогда площадь криволинейной трапеции между кривой и осью*** $\boldsymbol{Ox}$ ***вычисляется по формуле***

$\boldsymbol{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt}$.

Задача 1. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Решение.

В этом случае и кривая, и фигура, ограниченная этой кривой, называются «эллипс». Параметрическое уравнение эллипса (кривой) имеет вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t \ \Longrightarrow x'(t) = -a\sin t \\ y = b\sin t \\ t \in [-\pi;\pi]\,. \end{cases}$$

Заметим, что эллипс состоит из двух равных по площади половинок: верхней и нижней. Рассмотрим верхнюю. Точки верхней половинки получаются при $x \in [-a;a]$. Но $x\colon -a \to a$ при $t\colon \pi \to 0$! Поэтому

$$S = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)dt = -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt = -ab\int_{\pi}^{0}\left(1 - \underbrace{\cos 2t}_{T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi}\right)dt =$$

$$= -ab(0-\pi) = \pi ab.$$

Ответ: πab.

Задача 2. Найти площадь астроиды (фигуры, ограниченной кривой, которая также называется астроидой)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \;\Rightarrow x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t \\ y = a\sin^3 t \\ t \in [-\pi; \pi]\,. \end{cases}$$

Решение.

Заметим, что астроида состоит из двух равных по площади половинок: верхней и нижней. Рассмотрим верхнюю. Точки верхней половинки получаются при $x \in [-a; a]$. Но (внимание!) $x{:}\, -a \to a$ при $t{:}\, \pi \to 0$. Поэтому

$$S = 2\int_\pi^0 a\sin^3 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)dt = -6a^2\int_\pi^0 \sin^4 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= -6a^2\int_\pi^0 \sin^2 t\sin^2 t\cos^2 t\,dt = -6a^2\int_\pi^0 \frac{1-\cos 2t}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= -6a^2\cdot\frac{1}{8}\int_\pi^0 \sin^2 2t\,dt + 6a^2\cdot\frac{1}{8}\int_\pi^0 \sin^2 2t\cos 2t\,dt =$$

$$= -\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_\pi^0\left(1 - \underbrace{\cos 4t}_{T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}}\right)dt + \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_\pi^0 \sin^2 2t\,d\sin 2t =$$

$$= -\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{2}(0-\pi) + 0 + \frac{3a^2}{8}\left(\frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Big|_\pi^0 = \frac{3\pi a^2}{8} + 0 = \frac{3\pi a^2}{8}\,.$$

Ответ: $\frac{3\pi a^2}{8}$.

Задача 3. Найти площадь между первой аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = t - \sin t \Rightarrow x'(t) = 1 - \cos t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

и прямой $y = \frac{1}{2}$.

Решение.

Найдем точки пересечения циклоиды и прямой:

$$\begin{cases} y = 1 - \cos t \\ y = \frac{1}{2} \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{3} \vee t = \frac{5\pi}{3} \\ y = \frac{1}{2} \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt - \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt - \frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin t \,\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2t \,\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} - \frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} - 2\left(\sin\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\sin\frac{10\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{2\pi}{3} =$$

$$= 2\pi - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{4\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{4}$.

II. Длина кривой

II.1. Длина кривой, заданной в виде $\boldsymbol{y = y(x)}$, $\boldsymbol{x \in [a; b]}$ или $\boldsymbol{x = x(y)}$, $\boldsymbol{y \in [c; d]}$:

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx} \quad \textbf{\textit{или}} \quad \boldsymbol{l = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2} dy.}$$

Задача 1. Найти длину кривой $y = \ln \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow$$

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{|\sin x|} dx \boxed{=}$$

так как $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \Longrightarrow \sin x \geq 0 \Longrightarrow |\sin x| = \sin x$

$$\boxed{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin\frac{x}{2}dx}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos\frac{x}{2}dx}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin\frac{x}{2}d\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos\frac{x}{2}d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \left(-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right| - \ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\right| = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} + \ln\sqrt{3} = 2\ln\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\ln\sqrt{3}$.

Задача 2. Найти длину части параболы $y = -x^2 + 2x$ от вершины до точки с координатами $(2; 0)$.

Решение. Вершина параболы находится в точке с координатами

$x_0 = -\frac{2}{-2} = 1,\ y_0 = 1,$ и $y' = -2x + 2 \implies$

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + (-2x+2)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + (2x-2)^2}dx \ \boxed{=}$$

Рассмотрим сначала неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{1 + (2x-2)^2}dx = \left\|\begin{matrix} 2x-2=t \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int t d\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1-1)dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)dt}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \sqrt{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \sqrt{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|.$$

Получили уравнение относительно интеграла $\implies$

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R} \implies$$

$$\int \sqrt{1 + (2x-2)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}(2x-2)\sqrt{1+(-2x+2)^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x - 2 + \sqrt{1+(-2x+2)^2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

$$= \frac{1}{4}\left((2x-2)\sqrt{1+(-2x+2)^2}\right)\Big|_1^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\ln\left|2x-2+\sqrt{1+(-2x+2)^2}\right|\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{5} - 0 + \frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right| - \frac{1}{4}\ln 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).$$

Замечание. Ответ $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$ тоже верный. Почему? Потому что

$$\ln\left(\sqrt{5}-2\right) = \ln\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+2)} = \ln\frac{5-4}{(\sqrt{5}+2)} = \ln\frac{1}{(\sqrt{5}+2)} = \ln 1 - \ln\left(\sqrt{5}+2\right) =$$

$$= 0 - \ln\left(\sqrt{5}+2\right) = -\ln\left(\sqrt{5}+2\right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

Задача 3. Найти длину кривой $y = \frac{x\sqrt{x+3}}{3}$ при $1 \le x \le 6$.

Решение.

В этом случае

$$y' = \frac{1}{3}\left(1\cdot\sqrt{x+3} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}} = \frac{x+2}{2\sqrt{x+3}} .$$

Поэтому

$$1+y'^2 = 1+\frac{(x+2)^2}{4(x+3)} = \frac{4x+12+x^2+4x+4}{4(x+3)} = \frac{x^2+8x+16}{4(x+3)} = \frac{(x+4)^2}{4(x+3)} .$$

Следовательно,

$$l = \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{6}}\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{6}}\sqrt{\frac{(x+4)^2}{4(x+3)}}dx = \int_1^6\frac{|x+4|}{2}\frac{1}{\sqrt{x+3}}dx = \int_1^6\frac{x+4}{2}\frac{1}{\sqrt{x+3}}dx =$$

Сделаем замену переменной $\sqrt{x+3} = t$, тогда $x+3 = t^2$, $x = t^2-3$, $dx = 2tdt$, $x = 1 \to t = 2$, $x = 6 \to t = 3$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3\frac{t^2-3+4}{2}\cdot\frac{1}{t}\cdot 2tdt = \int_2^3(t^2+1)dt = \left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_2^3 = \left(\frac{27}{3}+3\right) - \left(\frac{8}{3}+2\right) =$$

$$= 9+3-2-\frac{8}{3} = 10-\frac{8}{3} = \frac{22}{3} .$$

Ответ: $\frac{22}{3}$.

II.2. Длина кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \\ \boldsymbol{t \in [t_1; t_2]} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.}$$

Задача 4. Найти длину кривой (астроиды) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \\ t \in [-\pi; \pi]\,. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \\ t \in [-\pi; \pi]\,. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t \\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t \\ t \in [-\pi; \pi]\,. \end{cases} \Rightarrow$$

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt = 3a\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2t}\,dt = \frac{3a}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin^2 2t}\,dt = \frac{3a}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin 2t|dt\ \boxed{\equiv}$$

Заметим, что астроида состоит из четырех кусочков одинаковой длины, причем, для того, который расположен в первом октанте выполняется условие $\sin 2t \geq 0 \Rightarrow |\sin 2t| = \sin 2t\ \ \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{\equiv}\ 4 \cdot \frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = 6a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(-1-1) = 6a.$$

Ответ: $6a$.

Задача 5. Найти длину кривой, заданной условиями (циклоида)

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in [0; 2\pi]\,. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in [0; 2\pi]\,. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 - \cos t \\ y'(t) = \sin t \\ t \in [0; 2\pi]\,. \end{cases} \Rightarrow$$

$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt\ \boxed{=}$

при $t\in[0;2\pi]$ аргумент $\frac{t}{2}\in[0;\pi]\Longrightarrow\sin\frac{t}{2}\geq 0\Longrightarrow\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sin\frac{t}{2}$,

$\boxed{=}\ 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=2(-2)\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4(-1-1)=8.$

Ответ: 8.

Задача 6. Найти длину кривой, заданной условиями $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\\ \quad t\in[0;1]\,.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\\ \quad t\in[0;1]\,.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x'(t)=e^t\cos t-e^t\sin t\\ y'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t\\ \qquad\quad t\in[0;1]\,.\end{cases}\Longrightarrow$$

$l=\int_0^1\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2}dt=$

$=\int_0^1\sqrt{e^{2t}(\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t+2\cos t\sin t+\sin^2 t)}\,dt=$

$=\int_0^1\sqrt{e^{2t}\cdot 2}\,dt=\sqrt{2}e^t\Big|_0^1=\sqrt{2}(e^1-e^0)=\sqrt{2}(e-1).$

Ответ: $\sqrt{2}(e-1)$.

II.3. Длина кривой, заданной в полярных координатах

Если кривая задана в полярных координатах $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_1;\varphi_2]$ то

$$\boldsymbol{l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi}$$

Задача 7. Найти длину кривой, заданной условиями $\begin{cases}r=\sqrt{2}e^{\varphi}\\ \varphi\in[0;\pi]\end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases}r=\sqrt{2}e^{\varphi}\\ \varphi\in[0;\pi]\end{cases}\Longrightarrow r'=\sqrt{2}e^{\varphi}\ \Longrightarrow$$

$l=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}e^{\varphi}\right)^2+\left(\sqrt{2}e^{\varphi}\right)^2}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{4e^{2\varphi}}dt=$

$=2\int_0^{\pi}e^{\varphi}dt=2e^{\varphi}\Big|_0^{\pi}=2(e^{\pi}-1).$

Ответ: $2(e^{\pi}-1)$.

Задача 8. Найти длину кривой, заданной условием $r=\sqrt{2}\sin\varphi$.

Решение.

Так как $\sin\varphi$ – периодическая функция, то достаточно рассмотреть $\varphi\in[0;2\pi]$ и тогда $\sin\varphi\geq 0 \Leftrightarrow \in[0;\pi]$.

$r'=\sqrt{2}\cos\varphi \;\Longrightarrow$

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right)^2+\left(\sqrt{2}\cos\varphi\right)^2}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{2}dt=\sqrt{2}\pi.$$

Ответ: $\sqrt{2}\pi$.

Задача 9. Найти длину кривой, заданной условием $r=a(1+\cos\varphi)$ (кардиоида).

Решение.

Так как $\cos\varphi$ – периодическая функция, то можно рассмотреть $\varphi\in[-\pi;\pi]$.

$$r'=-a\sin\varphi \;\Rightarrow l=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2(-\sin\varphi)^2}dt \;\boxed{=}$$

так как под знаком интеграла стоит четная функция, то

$$\boxed{=}\; 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2(-\sin\varphi)^2}dt=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}dt=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2})}dt=4a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|dt=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}dt=$$

$$=4a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a(1-0)=8a.$$

Ответ: $8a$.

III. Объемы тел вращения

Объем тела вращения, полученного вращением вокруг оси $\boldsymbol{Ox}$ или оси $\boldsymbol{Oy}$ криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $\boldsymbol{y=y(x)\geq 0}$, $\boldsymbol{y=0}$, $\boldsymbol{x=a}$, $\boldsymbol{x=b}$, $\boldsymbol{0\leq a<b}$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V_x=\pi\int_a^b y^2(x)dx} \quad \textit{и} \quad \boldsymbol{V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx}.$$

Замечание. Если функция $y = y(x)$ не удовлетворяет условию $y(x) \geq 0$, следует рассматривать функцию $|y(x)|$.

Замечание. Во всех следующих задачах, конечно, нужно нарисовать «картинки».

Задача 1. Найти V_x и V_y, полученные вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $xy = 6, x = 1, x = 4, y = 0$.

Решение.

$V_x = \pi \int_1^4 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{36}{x^2} dx = \pi \cdot 36 \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 = 36\pi \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 36\pi \cdot \frac{3}{4} =$
$= 27\pi.$

$V_y = 2\pi \int_1^4 x \cdot \frac{6}{x} dx = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi.$

Ответ: $V_x = 27\pi$; $V_y = 36\pi$.

Задача 2. Найти V_y, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1+x^2}, x = 0, x = 1, y = 0$.

Решение.

$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \frac{2}{1+x^2} dx = 2\pi \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = 2\pi \ln(1 + x^2)\Big|_0^1 = 2\pi(\ln 2 - \ln 1) =$
$= 2\pi \ln 2.$

Ответ: $2\pi \ln 2$.

Задача 3. Найти V_x, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}e^x, x = 0, x = \ln 2, y = 0$.

Решение.

$V_x = \pi \int_0^{\ln 2} \left(\sqrt{x}e^x\right)^2 dx = \pi \int_0^{\ln 2} xe^{2x} dx = \pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} x de^{2x} =$
$= \frac{\pi}{2} xe^{2x}\Big|_0^{\ln 2} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\ln 2} e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 \cdot e^{2\ln 2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^{\ln 2} =$
$= \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 \cdot 4 - \frac{\pi}{4}\left(e^{2\ln 2} - 1\right) = 2\pi \ln 2 - \frac{\pi}{4}\left(e^{\ln 2^2} - 1\right) = 2\pi \ln 2 - \frac{\pi}{4}(4 - 1) =$
$= 2\pi \ln 2 - \frac{\pi}{4} \cdot 3 = 2\pi \ln 2 - \frac{3\pi}{4}.$

Ответ: $2\pi \ln 2 - \frac{3\pi}{4}$.

Задача 4. Найти V_x и V_y, полученные вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = 2\sin x, 0 \le x \le \pi,\ y = 0$.

Решение.

$$V_x = \pi\int_0^{\pi}(2\sin x)^2dx = \pi\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \underbrace{\cos 2x}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}\right)dx = 2\pi\cdot\pi - 0 = 2\pi^2.$$

$$V_y = 2\pi\int_0^{\pi} x\cdot 2\sin x\,dx = -4\pi\int_0^{\pi} xd\cos x = -4\pi x\cos x\Big|_0^{\pi} + 4\pi\int_0^{\pi}\cos x\,dx =$$
$$= -4\pi(\pi\cdot(-1) - 0) + 4\pi\sin x\Big|_0^{\pi} = 4\pi^2.$$

Ответ: $V_x = 2\pi^2$; $V_y = 4\pi^2$.

Задача 5. Найти V_x, полученный вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot x^2.$$

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}(y(x))^2dx = \pi\int_{-a}^{a}\left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot x^2\right)dx = 2\pi\int_0^{a}\left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot x^2\right)dx =$$
$$= 2\pi\cdot b^2\cdot a - 2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{a} = 2\pi ab^2 - 2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3} = 2\pi ab^2 - \frac{2\pi ab^2}{3} =$$
$$= \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Ответ: $V_x = \frac{4}{3}\pi ab^2$.

Задача 6. Найти V_x, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = x^3, x \ge 0,\ x = 0,\ y = 8$.

Решение.

Кривые $y = x^3$ и $y = 8$ пересекаются при $x = 2$.

Эта криволинейная трапеция не удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме: нижняя сторона трапеции не лежит на оси Ox. Поэтому объем тела вращения вокруг оси Ox будет равен разности объемов, полученных вращением прямоугольника со сторонами 2 и 8 (ограниченного прямыми $y = 0$, $y = 8, x = 0, x = 2$) и трапеции, ограниченной кривыми $y = x^3, x = 2, y = 0$.

$$V_x = \pi \int_0^2 8^2 dx - \pi \int_0^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^2 (8^2 - (x^3)^2) dx = \pi \int_0^2 (64 - x^6) dx =$$

$$= \pi \cdot 64 \cdot 2 - \pi \cdot \frac{x^7}{7}\Big|_0^2 = 128\pi - \frac{128\pi}{7} = \frac{768\pi}{7}.$$

Ответ: $\frac{768\pi}{7}$.

Задача 7. Найти V_x, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = 1 - \cos x$, $x = 0$, $y = 1$.

Решение.

Кривые $y = 1 - \cos x$ и $y = 1$ пересекаются при $x = \frac{\pi}{2}$.

Эта криволинейная трапеция также не удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме: нижняя сторона трапеции не лежит на оси Ox. Поэтому объем тела вращения вокруг оси Ox будет равен разности объемов, полученных вращением прямоугольника, ограниченного прямыми $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ и трапеции, ограниченной кривыми $y = 1 - \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1^2 - (1 - \cos x)^2) dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 1 + 2\cos x - \cos^2 x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - \cos^2 x) dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x) dx =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) - \pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx =$$

$$= 2\pi \cdot (1 - 0) - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx =$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2\pi - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{4}(\sin \pi - \sin 0) = 2\pi - \frac{\pi^2}{4}.$$

Ответ: $2\pi - \frac{\pi^2}{4}$.

Задача 8. Найти V_x, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $y = \sqrt{2}x$.

Решение.

Кривые $y = \sqrt{x}$ и $y = x$ пересекаются при $x = 1$.

Кривые $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{2}x$ пересекаются при $x = \frac{1}{2}$.

Эта криволинейная трапеция не удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме: нижняя сторона трапеции не лежит на оси Ox. Поэтому, чтобы вычислить объем полученного тела вращения вокруг оси Ox, надо посчитать следующие объемы.

1) V_1 – объем тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y=\sqrt{2}x$, $y=0$ и $x=\frac{1}{2}$.
2) V_2 – объем тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x}$, $y=0, x=\frac{1}{2}$ и $x=1$.
3) V_3 – объем тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y=x$, $y=0$ и $x=1$.

Тогда искомый объем V_x будет равен $V_x=V_1+V_2-V_3$.

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}x\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}2x^2dx=2\pi\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{12}.$$

$$V_2=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}xdx=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\pi}{8}.$$

$$V_3=\pi\int_0^1(x)^2dx=\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}\cdot 1=\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно,

$$V_x=V_1+V_2-V_3=\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{3}=\pi\cdot\frac{2+9-8}{24}=\pi\cdot\frac{3}{24}=\frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

Задача 9. Найти V_x, полученный вращением циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t)\Longrightarrow x'(t)=a(1-\cos t)\\ y=a(1-\cos t)\\ t\in[0;2\pi]\end{cases}$$

Решение.

Замечание. Если кривая задана параметрически, то формула для вычисления объема V_x получается подстановкой вместо x и y их выражений $x=x(t)$, $y=y(t)$ и замены переменной в определенном интеграле:

$$V_x=\pi\int_a^b(y(x))^2dx=\pi\int_\alpha^\beta y^2\big(x(t)\big)dx(t)=\pi\int_\alpha^\beta y^2\big(x(t)\big)x'(t)dt.$$

В нашем случае

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} \big(a(1-\cos t)\big)^2 \cdot a(1-\cos t)dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \underbrace{3\cos t}_{T_0 = 2\pi} + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \cdot 2\pi - 0 + \pi a^3 \cdot \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \underbrace{\cos 2t}_{T_0 = \pi}\right) dt - \pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cos t \, dt =$$

$$= 2\pi^2 a^3 + \pi a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi + 0 - \pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, d\sin t =$$

$$= 2\pi^2 a^3 + 3\pi^2 a^3 - \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \, d\sin t =$$

$$= 5\pi^2 a^3 - \pi a^3 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

Ответ: $5\pi^2 a^3$.

Задача 10. Найти V_y, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = \sin x$ и $y = x^2 - \pi x$.

Решение.

Заметим, что эти кривые пересекаются при $x = 0$ и $x = \pi$. Кроме того, при $x \in [0; \pi]$ функция $y = \sin x$ принимает неотрицательные значения, а функция $y = x^2 - \pi x$ принимает неположительные значения. Поэтому, чтобы найти искомый объем тела вращения, надо найти следующие объемы.

1) V_1 – объем тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = \sin x$ и $y = 0$.
2) V_2 – объем тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = |x^2 - \pi x|$ и $y = 0$.

$$V_1 = 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx = -2\pi \int_0^{\pi} x d\cos x = -2\pi (x \cos x)\Big|_0^{\pi} + 2\pi \int_0^{\pi} \cos x \, dx =$$

$$= -2\pi(\pi \cos \pi - 0) + 2\pi(\sin x)\Big|_0^{\pi} = -2\pi \cdot (-\pi) + 2\pi(\sin \pi - \sin 0) =$$

$$= 2\pi^2 - 0 = 2\pi^2.$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot |x^2 - \pi x| dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot (\pi x - x^2) dx = 2\pi \int_0^{\pi} (\pi x^2 - x^3) dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\pi \left(\frac{\pi \cdot \pi^3}{3} - \frac{\pi^4}{4}\right) = 2\pi \cdot \frac{\pi^4}{12} = \frac{\pi^5}{6}.$$

Поэтому

$V_y = V_1 + V_2 = 2\pi^2 + \frac{\pi^5}{6}$.

Ответ: $2\pi^2 + \frac{\pi^5}{6}$.

Задача 11. Найти V_y, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = e^x - 1, y = e - 1,\ x = 0$.

Решение.

Обязательно нарисуйте «картинку»!

Кривые $y = e^x - 1$ и прямая $y = e - 1$ пересекаются при $x = 1$.

Эта криволинейная трапеция не удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме: нижняя сторона трапеции не лежит на оси Ox. Поэтому, чтобы вычислить объем полученного тела вращения вокруг оси Oy, надо посчитать следующие объемы.

1) V_1 – объем тела вращения, полученного вращением прямоугольника, ограниченного прямыми $y = e - 1,\ y = 0,\ x = 0$ и $x = 1$.
2) V_2 – объем тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = e^x - 1,\ y = 0,\ x = 0$ и $x = 1$.

И тогда искомый объем V_y будет равен $V_y = V_1 - V_2$.

$V_1 = 2\pi \int_0^1 x \cdot (e - 1)dx = 2\pi(e - 1)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \pi(e - 1)$.

$V_2 = 2\pi \int_0^1 x \cdot (e^x - 1)dx = 2\pi \int_0^1 xe^x dx - 2\pi \int_0^1 xdx =$

$= 2\pi \int_0^1 xde^x - 2\pi \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2\pi(xe^x)\Big|_0^1 - 2\pi \int_0^1 e^x dx - 2\pi \cdot \frac{1}{2} =$

$= 2\pi(e - 0) - 2\pi(e^x)\Big|_0^1 - \pi = 2\pi e - 2\pi(e - 1) - \pi =$

$= 2\pi e - 2\pi e + 2\pi - \pi = \pi$.

Следовательно,

$V_y = V_1 - V_2 = \pi e - \pi - \pi = \pi e - 2\pi = \pi(e - 2)$.

Ответ: $\pi(e - 2)$.

Рассмотрим предыдущую задачу в немного более простой постановке и решим ее двумя способами. Отметим, что в некоторых из предыдущих задач, также можно было использовать эту идею.

Задача 12. Найти V_y, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = e^x, y = e,\ x = 0$.

Решение.

Обязательно нарисуйте «картинку»!

Кривые $y = e^x$ и прямая $y = e$ пересекаются при $x = 1$.

Первое решение.

Эта криволинейная трапеция не удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме: нижняя сторона трапеции не лежит на оси Ox. Поэтому, чтобы вычислить объем полученного тела вращения вокруг оси Oy, надо посчитать следующие объемы.

1) V_1 – объем тела вращения, полученного вращением прямоугольника, ограниченного прямыми $y = e,\ y = 0,\ x = 0$ и $x = 1$.
2) V_2 – объем тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = e^x,\ y = 0, x = 0$ и $x = 1$.

И тогда искомый объем V_y будет равен $V_y = V_1 - V_2$.

$V_1 = 2\pi \int_0^1 x \cdot e dx = 2\pi e \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \pi e.$

$V_2 = 2\pi \int_0^1 x \cdot e^x dx = 2\pi(xe^x)\Big|_0^1 - 2\pi \int_0^1 e^x dx = 2\pi(e - 0) - 2\pi(e^x)\Big|_0^1 =$

$= 2\pi e - 2\pi(e - 1) = 2\pi.$

Следовательно,

$V_y = V_1 - V_2 = \pi e - 2\pi.$

Второе решение.

Попробуйте «мысленно» поменять местами оси Ox и Oy. Тогда наша криволинейная трапеция станет «очень хорошей» для вращения вокруг оси Oy, и ее объем можно вычислить по формуле

$V_y = \pi \int_0^{e-1} (x(y))^2 dy.$

Кривую, которая задается графиком функции $y = e^x$ можно задать графиком функции $x = \ln y$, поэтому получаем

$V_y = \pi \int_1^e (x(y))^2 dy = \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy = \pi y (\ln y)^2 \Big|_1^e - \pi \int_1^e y d(\ln y)^2 =$

$= \pi(e(\ln e)^2 - 1(\ln 1)^2) - 2\pi \int_1^e \ln y \, dy =$

$= \pi e - 2\pi y \ln y \Big|_1^e + 2\pi \int_1^e y d \ln y =$

$= \pi e - 2\pi(y \ln y - y \ln y)\Big|_1^e + 2\pi \int_1^e y \frac{1}{y} dy =$

$= \pi e - 2\pi(e - 0) + 2\pi \int_1^e dy = \pi e - 2\pi e + 2\pi(e - 1) =$

$= \pi e - 2\pi e + 2\pi e - 2\pi = \pi e - 2\pi = \pi(e - 2).$

То есть задачу можно решить, вычисляя только один интеграл.

Ответ: $\pi(e - 2)$.